VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

VYTAUTO DIDŽIOJO UNIVERSITETAS

Sigita PEČIULYTĖ

KRAŠTINIŲ UŽDAVINIŲ SU ĮVAIRIŲ TIPŲ NELOKALIOSIOMIS SĄLYGOMIS TYRIMAS IR SKAITINĖ ANALIZĖ

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2006

Disertacija rengta 2002–2006 m. Vytauto Didžiojo universitete.
Disertacija ginama eksternu.

Darbo mokslinis konsultantas:

doc. dr. Artūras Štikonas (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Turinys

Sutrumpinimai ir žymenys

$\blacksquare$	įrodymo pabaiga
$:=$	priskyrimo, apibrėžimo žymuo
$=$	lygybės žymuo
$\equiv$	tapatumo žymuo
$x \in X$	x yra aibės X elementas, x priklauso aibei X
$X \cap Y$	aibių sankirta
$X \cup Y$	aibių sąjunga
$\varnothing$	tuščia aibė
$X \times Y$	aibių Dekarto sąjunga
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \dots\}$ – natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, \dots\}$ – neneigiami sveikieji skaičiai
$\mathbb{N}_m$	$\{n \in \mathbb{N} \| n = km, k \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{N}_e$	lyginiai neneigiami sveikieji skaičiai
$\mathbb{N}_o$	nelyginiai teigiami sveikieji skaičiai
$\mathbb{Z}$	$\{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_2 \| k \leqslant n\}$
$\mathbb{Q}$	racionaliųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	realiųjų skaičių aibė
$\overline{\mathbb{R}}$	išplėstinė realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}_-$	neigiamų realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}_+$	teigiamų realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}_{0+}$	neneigiamų realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}_{0-}$	neteigiamų realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – skaičių plokštuma
$\mathbb{R}^2_+$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \| x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$
$\mathbb{C}$	kompleksinių skaičių aibė
$\overline{\mathbb{C}}$	išplėstinė kompleksinių skaičių aibė $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
i	menamasis vienetas $\sqrt{-1}$
$\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$	vektorius-stulpelis, matrica
C^k	tolydžiai k-kartų diferencijuojamųjų funkcijų klasė
W_2^k	k-kartų apibendintai diferencijuojamųjų funkcijų, integruojamų kvadratu pagal Lebegą, klasė
$\binom{k}{n}$	binominiai koeficientai
NKS	nelokalioji kraštinė sąlyga(os)

Paveikslų sąrašas

Įvadas

1. Temos aktualumas

Diferencialiniai uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra viena iš sparčiai besivystančios diferencialinių lygčių teorijos dalių. Nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai funkcijos arba išvestinės reikšmės kraštiniuose taškuose yra susijusios su jos reikšmėmis srities viduje, kai negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte. Uždavinių su įvairaus tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis teorinis tyrimas yra aktuali problema. Tokiems uždaviniams pastaruoju metu mokslinėje literatūroje skiriama nemažai dėmesio, jie tiriami tiek užsienio, tiek ir Lietuvos mokslininkų darbuose.

Diferencialinėmis lygtimis su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis gali būti aprašoma daugelis šiuolaikinės fizikos (šiluma [57], tamprumas [42], šiluminis laidumas [28, 29]), biologijos ir biotechnologijų [83, 99], cheminės difuzijos, populiacijų dinamikos, medicinos mokslų ir kitų sričių [39] uždavinių. Šiose mokslo srityse dažniausiai reikšmingi yra tik teigiami sprendiniai. Aukštesnės eilės diferencialinių lygčių kraštiniai uždaviniai paprastai atsiranda iš techninių taikymų. Dažniausiai tai būna daugiataškiai uždaviniai n-tosios eilės paprastosioms diferencialinėms lygtims [33].

Vieni iš pirmųjų uždavinius su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, šiuolaikiniame formulavime, pradėjo tirti A.A. Samarskis ir A.V. Bitsadzė elipsinio dvimačio uždavinio atveju [7]. Vėlesnėje mokslinėje literatūroje plačiai nagrinėjami uždaviniai su nelokaliosiomis Samarskio ir Bitsadzės tipo kraštinėmis sąlygomis. Šių uždavinių apibendrinimai pateikti daugelyje darbų [27, 40, 53, 66, 95].

Uždavinius su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis vienas iš pirmųjų tyrė J. Cannon [13]. Toliau šie uždaviniai buvo nagrinėjami parabolinėms lygtims [8, 11, 30, 36, 57, 61, 75, 79, 92, 93, 110, 111], elipsinėms lygtims [48, 101, 108] ir hiperbolinėms lygtims [6, 10, 41].

Gana nauja sritis, susijusi su šio tipo uždaviniais yra diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spektro tyrimas. Tikrinių reikšmių uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis yra glaudžiai susiję su diferencialinių lygčių kraštiniais uždaviniais [9, 43, 54]. Panašūs uždaviniai operatoriams su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis yra nagrinėjami darbuose [5, 15, 62, 76] ir su Samarskio ir Bitsadzės tipo arba daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis – darbuose [14, 33, 45, 46, 50, 52, 58, 59, 74, 77, 97, 98]. Tačiau tikrinių reikšmių uždaviniai diferencialiniams operatoriams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra kur kas mažiau nagrinėti negu klasikinių kraštinių sąlygų atveju.

Šios disertacijos *pirmajame* ir *antrajame* skyriuose tiriamas Šturmo ir Liuvilio uždavinių su viena klasikine kraštine sąlyga, o kita nelokaliąja integraline arba dvitaške kraštine sąlyga spektras.

Mokslinėje literatūroje gana dažnai nagrinėjama antros eilės diferencialinė lygtis

$$\tilde{\lambda}u''(x) + f(x, u(x)) = 0, \quad (0 < x < 1), \tag{1.1}$$

su įvairiomis nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis. Tokio tipo lygtį tyrė G. L. Karakostas, kai $f(x, u(x)) = q(x)f(u(x))$ [62] (2000) ir kai $f(x, u(x)) = a(x)f(u(x), u'(x))$ [64] (2002) su viena klasikine, o kita nelokaliąja integraline $u'(1) = \int_\xi^1 u'(s)\mathrm{d}q(s)$ kraštine sąlyga. Jis gavo šio uždavinio pakankamas teigiamo sprendinio egzistavimo sąlygas.

Lietuvoje (1.1) uždavinio, kai $f(x, u(x)) = u(x)$ su viena klasikine, o kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga $u(1) = a\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x$ arba su abiem integralinėmis kraštinėmis sąlygomis, spektrą tyrė R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas [15] (2004). Straipsnyje [5] (2006) apibendrinti [15] rezultatai, kai diferencialinės lygties koeficientai yra kintami. Taip pat tiesinės paprastosios antros eilės diferencialinės lygtys su kintamais koeficientais ir nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis nagrinėjamos [76] (1995).

Straipsnyje [54] G. Infante ištyrė Hameršteino integralinės lygties

$$\tilde{\lambda}u(t) = \int_G k(t, s)f(s, u(s))\mathrm{d}s \tag{1.2}$$

tikrines reikšmes. Čia G – kompaktiška aibė $\mathbb{R}^n$, k ir f gali būti ir netolydžios funkcijos, o k gali keisti ženklą. Straipsnyje [54] G. Infante nagrinėja bendresnes lygtis, kurios gali neturėti teigiamų sprendinių. Šiuo atveju ieškomi netrivialieji sprendiniai. Gautus rezultatus G. Infante taiko antros eilės diferencialinei lygčiai (1.1) su įvairiomis nelokaliosiomis dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis:

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u'(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{1.3$_1$}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u'(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{1.3$_2$}$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{1.3$_3$}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \tag{1.3$_4$}$$

G. Infante [54] nustatė sąlygas, su kuriomis šie uždaviniai turi teigiamas tikrines reikšmes, ir rado jas atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis. Jis parodė, kad egzistuoja tokia teigiama (arba neigiama) reikšmė $\tilde{\lambda}$, kad (1.1) lygtis turi nenulinį sprendinį.

Trečiajame disertacijos skyriuje, taip pat tiriamos Šturmo ir Liuvilio uždavinio, kuris yra atskiras G. Infante nagrinėjamo uždavinio atvejis, su nelokaliosiomis (1.3) ir su kitokiomis dvitaškėmis ir integralinėmis kraštinėmis sąlygomis tikrinės funkcijos.

Labiausiai įvairioje mokslinėje literatūroje išnagrinėta (1.1) lygtis su (1.3_4) kraštinėmis sąlygomis, taip pat nemažai dėmesio skiriama ir šiam uždaviniui su (1.3_3) sąlygomis. Tokio tipo lygtį, atveju, kai $f(x, u(x)) = g(x)f(u)$, nagrinėjo R. Ma [77, 78] ir J. R. L. Webb [109] (2001). R. Ma [77] (1998) parodė, kad (1.1) lygtis su (1.3_4) kraštinėmis sąlygomis turi bent vieną teigiamą sprendinį, kai f yra subtiesinė ($f(0) = \infty$ ir $f(\infty) = 0$) arba supertiesinė ($f(0) = 0$ ir $f(\infty) = \infty$) funkcija. Taip pat R. Ma [78] (2000) įrodė, su kokiomis parametro $\widetilde{\lambda}$ reikšmėmis (1.1), (1.3_4) uždavinys turi teigiamus sprendinius. J. R. L. Webb [109] (2001) nustatė, kada (1.1), (1.3_3) ir (1.1), (1.3_4) uždaviniai turi bent du teigiamus sprendinius, pagerindamas R. Ma rezultatus.

Lygtį

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) + e(x)$$

su (1.3_4) kraštinėmis sąlygomis tyrė C. P. Gupta [46, 47]. Jis įrodė šio uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas, kai $\gamma \leq 1$, $\gamma > 1$, kai $\gamma\xi < 1$ [46] (1994) ir $\gamma\xi \neq 1$ [47] (1997).

Uždavinių (1.1)–(1.3_2), (1.3_3) ir (1.3_4) su įvairiomis parametrų γ ir ξ reikšmėmis kartotinių netrivialių sprendinių egzistavimą nagrinėjo G. Infante ir taip pat J. R. L. Webb [55, 56] (2002, 2003).

Šturmo ir Liuvilio uždavinį (1.1) su (1.3_1) nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis vienas pirmųjų pradėjo nagrinėti G. Infante. Taip pat tokio tipo uždavinį tyrė Y. P. Sun [102] (2004). Jis gavo pakankamas netrivialaus sprendinio egzistavimo sąlygas su tam tikrais apribojimais funkcijos f augimui. Lygties (1.1) su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis ir $f(x, u(x)) = g(x)h(u(x))$ tikrines funkcijas nagrinėjo K. Q. Lan ir J. R. L. Webb [72] (1998).

Straipsniuose [45, 44, 58] buvo tiriamas tikrinių reikšmių uždavinys su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis skirtinguose intervalo galuose. Taip pat antros eilės diferencialinės lygties su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis skirtinguose intervalo galuose teigiamų sprendinių egzistavimo sąlygas nagrinėjo G. L. Karakostas ir P. Ch. Tsamatos [63] (2002). Jie įrodė apatinio ir viršutinio sprendinio egzistavimą.

Šturmo ir Liuvilio uždavinio, kuris priklauso nuo tikrinės reikšmės parametro ir su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis, tikrinių reikšmių uždavinį tyrė M. Langer [73] (2000). Jis gavo tikrinių reikšmių įverčius.

Daugiataškį nelokalųjį kraštinį uždavinį antros eilės paprastosioms diferencialinėms lygtims vienmačiu atveju pirmieji pradėjo nagrinėti V. Iljynas ir E. Moisejevas [52] (1987), taip pat ir Ch. P. Gupta. Jis su bendraautoriais [46] (1994) straipsnyje tyrė paprastąją antros eilės diferencialinę lygtį su viena klasikine, o kita nelokaliąja daugiataške kraštine sąlyga $u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i)$ ir gavo sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas $C^1[0, 1]$ erdvėje. Vėliau bendresnius netiesinius daugiataškius kraštinius uždavinius nagrinėjo keletas autorių, remdamiesi Lerė ir

Šauderio pratęsimo teorema, nejudamo taško teorema kūgyje ir pan.

Lygtį (1.1) su tokiomis pačiomis kaip ir [46] sąlygomis, kai $f(x, u(x)) = a(x)f(u(x), u'(x))$, nagrinėjo D. Cao, R. Ma [14] (2000). Čia a – tolydi funkcija, kuri gali keisti ženklą intervale $[0, 1]$, f – taip pat tolydi funkcija, o $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ – maža teigiama konstanta. Sprendinių egzistavimas buvo įrodomas remiantis Lerė–Šauderio nejudamo taško teorema.

Antros eilės paprastąją diferencialinę lygtį su viena trečiojo tipo, o kita daugiataške (tokia pačia, kaip ir nagrinėta [14, 46]) kraštine sąlyga tyrė P. K. Palamides [85] (2002). Jis įrodė teigiamo ir monotoniško (kai kuriais atvejais) sprendinio egzistavimą, kai funkcija f yra subtiesinė arba supertiesinė.

P. W. Eloe, J. Henderson [33] (1997) nustatė parametro λ reikšmes, su kuriomis egzistuoja n-tosios eilės diferencialinės lygties su daugiataškėmis kraštinėmis sąlygomis sprendinys.

Pastaraisiais metais gana aktyviai nagrinėjami paraboliniai ir stacionarieji uždaviniai su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis, bei jų skaitiniai sprendimo metodai.

R. Čiegio, A. Štikono, O. Štikonienės ir O. Suboč straipsnyje [23] išnagrinėtas uždavinys

$$\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - q(x,t)u + f(x,t), \quad x \in (0,1),\ t \in (0,T], \tag{1.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.5}$$

$$u(0,t) = \gamma_0\big(\tilde{\alpha}_0(t)u(\tilde{x}_0(t),t) + \int_0^1 \tilde{\beta}_0(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\big) + f_0(t), \tag{1.6}$$

$$u(1,t) = \gamma_1\big(\tilde{\alpha}_1(t)u(\tilde{x}_1(t),t) + \int_0^1 \tilde{\beta}_1(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\big) + f_1(t); \tag{1.7}$$

čia $t \in (0,T]$, $\rho(x,t) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x,t) \geqslant 0$, $0 \leqslant \tilde{x}_l(t) \leqslant 1$, α_l ir β_l yra žinomos funkcijos, o parametrai $(\gamma_0, \gamma_1) \in \mathbb{R}^2_+ = \{(\gamma_0, \gamma_1) | \gamma_l \geqslant 0\}$, $l = 0, 1$.

O (1.4)–(1.7) uždavinį atitinkantis stacionarusis uždavinys, ištirtas straipsnyje [22] (2001). Pastaruosiuose darbuose buvo nagrinėjami diferencialinis ir diskretusis (baigtinių skirtumų) uždaviniai, buvo tiriama kaip jų sprendinio egzistavimas priklauso nuo nelokališkumo parametrų $\gamma_l, l = 0, 1$, surastos vienintelio neneigiamo sprendinio egzistavimo sritys. Taip pat buvo gautos būtinos ir pakankamos sprendinio korektiškumo sąlygos pagal maksimumo normą stacionariajam uždaviniui tiek diferencialiniu, tiek diskrečiuoju atveju [22], o baigtinių skirtumų schemai parabolinio uždavinio atveju pakankamos diskrečiojo sprendinio korektiškumo sąlygos [23]. Pastarajame straipsnyje nagrinėto uždavinio tyrimas pratęstas R. Čiegio darbe [18](2004), kai (1.4) lygties dešinioji pusė yra netiesinė ($f = f(u, x, t)$).

Ketvirtajame disertacijos skyriuje apibendrinti [22] straipsnyje paskelbti rezultatai, kai kraštiniame uždavinyje yra įvairesnės kraštinės sąlygos.

Taip pat netiesinę parabolinę lygtį (1.4), kai $\rho(x,t) = 1$, $q(x,t) = 0$ ir $f(x,t) = f(x,t,u)$, su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis (1.6)–(1.7), kai $\gamma_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = 0, 1$, nagrinėjo M. Sapagovas [93](2002). Diferencialinę lygtį jis aproksimavo tiek pagal erdvinę koordinatę, laiko kintamąjį, tiek ir pagal abu kintamuosius. Šiais trimis aproksimacijų būdais buvo siekiama išsiaiškinti kaip nelokalioji kraštinė sąlyga įtakoja skaitinius metodus. Straipsnyje [93] iškelta hipotezė, kad funkcijos, įeinančios į nelokaliąją sąlygą, labiau įtakoja skaitinį lygties sprendimo algoritmą, nei pati lygtis.

Parabolinių uždavinių su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis (1.6)–(1.7), kai $\gamma_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = 0, 1$, sprendinių egzistavimo ir vienaties sąlygas vienmatėje srityje tyrė W. A. Day [28, 29] (1982, 1983) su prielaida, kad

$$\int_0^1 |\beta_l| \mathrm{d}x < 1, \quad l = 0, 1. \tag{1.8}$$

W. A. Day gauti rezultatai su (1.8) apribojimais branduoliams buvo apibendrinti vėlesniuose A. Friedman [37] (1986), B. Kawohl [65] (1987) ir kitų autorių darbuose. Parabolinę lygtį su (1.6)–(1.7) kraštinėmis sąlygomis, kai $\gamma_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = 0, 1$, skaitiškai sprendė G. Ekolin [32](1991). Jis įrodė išreikštinio ir neišreikštinio Oilerio metodų konvergavimą. Integralai, įeinantys į nelokaliąsias kraštines sąlygas, buvo keičiami reikšmėmis, apskaičiuotomis remiantis kvadratūrinėmis trapecijų formulėmis. Tame pačiame straipsnyje taip pat buvo įrodytas Kranko–Nikolsono metodo konvergavimas su sąlyga

$$\Big(\int_0^1 |\beta_0| \mathrm{d}x \Big)^{1/2} + \Big(\int_0^1 |\beta_1| \mathrm{d}x \Big)^{1/2} < \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1.9}$$

G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos [36] (1996) Galerkino metodu gavo kvazitiesinio ($f = f(x,t,u)$) parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis įverčius, kai

$$\int_0^1 |\beta_l|^2 \mathrm{d}x < 1, \quad l = 0, 1. \tag{1.10}$$

Tiek G. Ekolin [32], tiek ir G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos [36] optimalius paklaidos įverčius gavo maksimumo normoje, pasirėmę maksimumo principu.

Parabolinei lygčiai su (1.6)–(1.7) kraštinėmis sąlygomis, kuriose $\gamma_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = 0, 1$, Y. Liu [75] (1999) įrodė vadinamojo θ-metodo konvergavimą, kai $\theta \geqslant 1/2$ ir su silpnesnėmis sąlygomis negu (1.9):

$$\int_0^1 |\beta_0|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 |\beta_1|^2 \mathrm{d}x < 2. \tag{1.11}$$

Tiesinių lygčių sistemos koeficientų matrica, gauta θ-metodu, yra triįstrižainė, išskyrus pirma ir paskutinę eilutes. Energetinis metodas, kurį naudoja Y. Liu analizuodamas θ-metodą, yra panašus į metodą, naudojamą G. Fairweather ir J. C. Lopez-Marcos [36]. Straipsniuose [32, 75] nagrinėti metodai ir gauti rezultatai apibendrinti darbe [8] (2002). Parabolinius uždavinius su tokio tipo nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis nagrinėjo C. V. Pao [87, 88] (1995, 1998).

Lygtį (1.4), kai $\rho(x,t) = 1$, $p(x) = 1$ ir $q(x,t) = 0$, su trečiojo tipo nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis (1.6)–(1.7), kai $\gamma_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = 0, 1$, tyrė WT. Ang [1](2006). Jis aprašė skaitmeninį metodą, kuris paremtas parabolinės lygties suvedimu į integralinę ir diferencialinę formą ir lokaliai interpoliacinių funkcijų aproksimacija.

2. Darbo tikslai ir uždaviniai

- Išanalizuoti Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine kraštine sąlyga ir kita nelokaliąja kraštine sąlyga (integraline arba dvitaške) spektro priklausomybę nuo nelokaliosios sąlygos parametrų, realiųjų tikrinių reikšmių atveju.

- Nustatyti Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įsu viena klasikine kraštine sąlyga ir kita nelokaliąja kraštine sąlyga (integraline arba dvitaške) teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalus.

- Ištirti baigtinių skirtumų schemų, aproksimuojančių stacionarųjį uždavinį su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumą ir konvergavimą pagal energetinę normą.

- Parabolinio uždavinio su viena klasikine, o kita nelokaliąja kraštine sąlyga sprendinio radimui panaudoti Gryno funkciją, leidžiančią išreikšti sprendinį srities viduje per jo reikšmes kraštuose.

3. Mokslinis naujumas

1. Disertacijoje ištirta Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įvairiomis nelokaliosiomis integralinėmis ir dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis spektro priklausomybė nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų. Tuo tarpu iki šiol buvo nagrinėjami tik atskiri stacionariųjų uždavinių spektrų atvejai. Bendradarbiaujant su mokslinio darbo vadovu A. Štikonu disertacijoje ir bendruose

straipsniuose buvo įvesta vadinamoji charakteristinė γ-funkcija, kuri suteikia nemažai informacijos tiriant stacionariojo uždavinio spektrą. Disertacijoje sukurta Šturmo ir Liuvilio uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spektro tyrimo metodika. Tiriant Šturmo ir Liuvilio uždavinį su nelokaliosiomis dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis nustatyti atvejai, neminėti literatūroje, kai vienmačiu atveju egzistuoja kelios neigiamos tikrinės reikšmės, arba kintant parametrui γ, realiosios tikrinės reikšmės suartėja ir pereina į kompleksinę plokštumą, o vėliau tampa realiosiomis tikrinėmis reikšmėmis.

2. Šioje disertacijoje plačiai išnagrinėtos Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įvairiomis nelokaliosiomis integralinėmis ir dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis tikrinės funkcijos. Priklausomai nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų, nustatyti teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalai ir palyginti su G. Infante [54] straipsnyje aprašytais rezultatais. Kai kuriais kraštinių sąlygų atvejais šie intervalai skiriasi nuo G. Infante nagrinėjamų uždavinių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalų. Disertacijoje gauti rezultatai patikslina iki šiol mokslinėje literatūroje aprašytus rezultatus, leidžia gauti būtinas ir pakankamas šių intervalų egzistavimo sąlygas.

3. Mokslinėje literatūroje gana plačiai nagrinėjami paraboliniai ir stacionarieji uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Šioje disertacijoje stacionariųjų uždavinių atveju apibendrinti [22] straipsnyje ir O. Subač daktaro disertacijoje „Kai kurie uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis“(2002) paskelbti rezultatai, uždaviniams su įvairesnėmis nelokaliosiomis kraštinės sąlygomis. Straipsnyje [22] nagrinėjamas stacionarusis uždavinys su Dirichlė tipo kraštine sąlyga, ir sprendinio korektiškumas gautas maksimumo normoje. Šioje disertacijoje nagrinėjami uždaviniai su antrojo arba trečiojo tipo kraštinėmis sąlygomis, kai negalima tiesiogiai pritaikyti maksimumo principo, todėl gauti įverčiai pagal energetinę normą. Pasinaudojant įdėties teorema, įrodytas tokių uždavinių korektiškumas ir pagal maksimumo normą.

4. Disertacijoje pasiūlytas parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendimo būdas, kai sprendinio reikšmės srities krašte randamos sprendžiant antrojo tipo Volteros integralinę lygtį. Radus šio uždavinio sprendinio reikšmes, parabolinio uždavinio sprendinys visoje srityje randamas sprendžiant klasikinį uždavinį.

4. Gautųjų rezultatų reikšmė

1. Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spektro kokybinės analizės rezultatai gali būti taikomi sprendžiant daugiamačius stacionariuosius ir parabolinius uždavinius tiek analiziniais, tiek ir skaitiniais metodais, tiriant baigtinių skirtumų schemų stabilumą bei iteracinių metodų konvergavimą šiems uždaviniams.

2. Rezultatai apie teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalus gali būti panaudoti Hamešteino integralinės lygties bei kitų panašių uždavinių sprendinių tyrime.

3. Gautos baigtinių skirtumų schemos stacionariajam uždaviniui su įvairaus tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendinio egzistavimo būtinos ir pakankamos sąlygos ir stabilumo įverčiai leidžia naudoti pateiktas baigtinių skirtumų schemas tokių uždavinių skaitiniame sprendime.

4. Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendimas suvedamas į keleto klasikinių uždavinių (fundamentaliųjų sprendinių radimas arba Volteros integralinės lygties sprendinio radimas) sprendimą. Šių uždavinių sprendimui galima naudoti teoriškai pagrįstus ir praktiškai patikrintus sprendimo metodus: baigtinių skirtumų, baigtinių elementų, splainų ir t.t.

5. Darbo rezultatų aprobavimas ir publikacijos

Pagrindiniai darbo rezultatai paskelbti 2 mokslinėse publikacijose Lietuvos leidiniuose, įrašytuose į Mokslo ir studijų departamento patvirtintą sąrašą, 4 mokslinėse publikacijose Lietuvos periodiniuose ir recenzuojamuose leidiniuose, 1 mokslinė publikacija recenzuojamame tarptautinės konferencijos darbų leidinyje anglų kalba ir 1 mokslinė publikacija Lietuvos konferencijos pranešimų medžiagoje. Autorės publikacijos pateiktos papildomame sąraše „Autorės publikacijų sąrašas“.

Konferencijose skaityti pranešimai:

- S. Pečiulytė, O. Štikonienė, A. Štikonas. Stationary problems with nonlocal conditions // 8th MMA Conference, 2003 m. gegužės 28 - 31 d., Trakai.

- O. Štikonienė, S. Pečiulytė, A. Štikonas. Stationary problems with nonlocal conditions // 8th MMA Conference, 2003 m. gegužės 28 - 31 d., Trakai.

- O. Štikonienė, A. Štikonas, S. Pečiulytė. Uždavinių su nelokaliomis sąlygomis energetiniai įverčiai // Lietuvos matematikų draugijos XLIV konferencija, 2003 m. birželio 19 - 20 d., Vilnius.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis suvedimas į integralinę lygtį // 9-oji magistrantų ir doktorantų konferencija Informacinė visuomenė ir universitetinės studijos, 2004 m. balandžio 15 d., Kaunas.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Apie vieno stacionariojo uždavinio su nelokaliąja kraštine sąlyga spektrą // Lietuvos matematikų draugijos XLV konferencija, 2004 m. birželio 17 - 18 d., Kaunas.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Apie stacionariojo uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga teigiamas tikrines reikšmes // Konferencija Matematika ir matematikos dėstymas, 2005 m. balandžio 7 - 8 d., Kaunas.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Sturm - Liouvile problem for stationary differential problem with nonlocal integral boundary condition // 10th MMA Conference, minisymposium Mathematical models including non-local boundary conditions, 2005 m. birželio 1 - 5 d., Trakai.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Šturmo - Liuvilio uždavinys kraštiniam uždaviniui su viena dvitaške nelokaliąja antrojo tipo kraštine sąlyga // Lietuvos matematikų draugijos XLVI konferencija, 2005 m. birželio 15 - 16 d., Vilnius.
- S. Pečiulytė. Kraštinių uždavinių su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis tyrimas // Konferencija Matematika ir matematikos dėstymas, 2006 m. balandžio 6 - 7 d., Kaunas.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Sturm - Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two-point boundary conditions // 11th MMA Conference, minisymposium Problems with nonlocal conditions, 2006 m. gegužės 31 d. - birželio 3 d., Jurmala, Latvija.
- S. Pečiulytė, A. Štikonas. Apie vieno nelokalaus kraštinio uždavnio teigiamas tikrines funkcijas // Lietuvos matematikų draugijos XLVII konferencija, 2006 m. birželio 20 - 21 d., Kaunas.

6. Disertacijos struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro įvadas, penki skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Skyriai yra suskaidyti į poskyrius, o kai kurie poskyriai - į skirsnius. Disertacijoje naudosime numeraciją „skyrius.poskyris“, „skyrius.poskyris.skirsnis“, „skyrius.poskyris.teiginys“, „skyrius.paveikslelis“. Įvadas nėra skyrius, todel skyriaus numerio nėra jo formulių, teiginių, poskyrių ir paveikslėliu numeracijoje. Formulių numeracija yra atskira kiekviename skyriuje, t.y. skyriaus numeris nepridedamas. Cituojant formulę iš kito skyriaus papildomai nurodysime skyrių.

Įvade apsvarstytas disertacijos temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, mokslinis naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikta darbo aprobacija ir publikacijų sąrašas. Taip pat pateikta keletas apibrėžimų, žymėjimų ir naudojamų sąvokų.

Pirmajame skyriuje suformuluotas nagrinėjamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys stacionariajam diferencialiniam operatoriui su viena klasikine, o kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga [1A, 4A, 6A, 7A]:

$$\begin{aligned}
&-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1),\\
&u(0) = 0,\\
&u(1) = \gamma \int_0^{\xi} u(t)\mathrm{d}t, \quad \text{(1 atv.)}\\
&u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1} u(t)\mathrm{d}t, \quad \text{(2 atv.)}
\end{aligned}$$

čia $\gamma \in \bar{\mathbb{C}}$ ir $\xi \in [0,1]$. Taigi, tiriami du nelokaliųjų integralinių kraštinių sąlygų atvejai. Nagrinėjama, kaip šio uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos priklauso nuo nelokaliųjų integralinių kraštinių sąlygų parametrų γ ir ξ. Trečiajame pirmojo skyriaus poskyryje apžvelgtas Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektro savybės kompleksinėje plokštumoje.

6.1 *pastaba.* Šie rezultatai (kaip ir analogiški rezultatai 3 skyriuje) reikalingi tolesniam realiųjų tikrinių reikšmių tyrimui, tačiau neteikiami gynimui, nes ši bendra straipsnių dalis buvo atlikta A. Štikono.

Ketvirtajame poskyryje jis detaliai išanalizuotas, kai $\gamma \in \mathbb{R}$. Pastaruoju atveju nagrinėjamos tik realiosios Šturmo ir Liuvilio uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos. Šiame poskyryje suformuluotos ir įrodytos lemos apie neigiamų tikrinių reikšmių ir tik realiųjų tikrinių reikšmių egzistavimą abiem nelokaliųjų integralinių kraštinių sąlygų atvejais.

Antrajame skyriuje tiriamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys stacionariajam diferencialiniam operatoriui tik su viena nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga [2A, 5A]:

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda u, \qquad t \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= \gamma u(\xi), \quad \text{(1 atv.)} \\ u'(1) &= \gamma u'(\xi), \quad \text{(2 atv.)} \\ u(1) &= \gamma u'(\xi). \quad \text{(3 atv.)} \end{aligned}$$

Kaip matyti, nagrinėjami trys nelokaliųjų dvitaškių kraštinių sąlygų atvejai. Išnagrinėta šių uždavinių spektrų priklausomybė nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų γ ir ξ. Antrojo skyriaus struktūra yra panaši į pirmojo.

Trečiajame šio skyriaus poskyryje yra apžvelgtas Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektras kompleksinėje plokštumoje. Ketvirtasis poskyris skirtas šio uždavinio spektro analizei, kai $\gamma \in \mathbb{R}$. Pastarasis poskyris yra suskaidytas į tris skirsnius. Juose yra išsamiai išnagrinėti spektrai visų trijų nelokaliųjų kraštinių sąlygų atvejais, taip pat suformuluotos ir įrodytos lemos apie neigiamų tikrinių reikšmių ir tik realiųjų tikrinių reikšmių (1 ir 2 atv.) egzistavimą.

Trečiajame disertacijos skyriuje tiriamos pirmuose dviejuose skyriuose suformuluoto Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įvairiomis nelokaliosiomis dvitaškėmis ir integralinėmis kraštinėmis sąlygomis teigiamos tikrinės funkcijos. Trečiajame ir ketvirtajame poskyriuose, įvedus matomos iš dešinės funkcijos apibrėžimą, plačiai išanalizuoti Šturmo ir Liuvilio uždavinio su nelokaliosiomis dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis:

$$\begin{aligned} u'(1) &= \gamma u(\xi), \quad \text{(1 atv.)} \\ u'(1) &= \gamma u'(\xi), \quad \text{(2 atv.)} \\ u(1) &= \gamma u'(\xi), \quad \text{(3 atv.)} \\ u(1) &= \gamma u(\xi); \quad \text{(4 atv.)} \end{aligned}$$

su G. Infante [54] straipsnyje nagrinėtomis dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis:

$$\begin{aligned} u(1) &= \gamma u'(\xi), \quad \text{(5 atv.)} \\ u(1) &= \gamma u(\xi); \quad \text{(6 atv.)} \end{aligned}$$

ir su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} u(1) &= \gamma \int_0^\xi u(t)\mathrm{d}t, \\ u(1) &= \gamma \int_\xi^1 u(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalai. Skyriaus pabaigoje suformuluota teorema, kokiems γ ir t egzistuoja teigiama tikrinė reikšmė ir ją atitinkanti teigiama tikrinė funkcija.

Ketvirtasis disertacijos skyrius yra skirtas stacionariojo uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis baigtinių skirtumų metodo nagrinėjimui. Nagrinėjamas stacionarusis uždavinys su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis [3A]:

$$L(u) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big) + q(x)u = f, \;\; x \in (0, L),$$

$$u|_{x=0} := \gamma_0\Big(\sum_{j=1}^{J} \alpha_0^j u(a_0^j) + \int_0^1 \big(\beta_0(x)u(x) + \bar{\beta}_0(x)u'(x)\big)\mathrm{d}x\Big) + g_0,$$

$$u|_{x=L} := \gamma_1\Big(\sum_{j=1}^{J} \alpha_1^j u(a_1^j) + \int_0^1 \big(\beta_1(x)u(x) + \bar{\beta}_1(x)u'(x)\big)\mathrm{d}x\Big) + g_1,$$

čia kraštinės sąlygos gali būti pirmojo, antrojo arba trečiojo tipo, sudaryta $O(\tau + h^2)$ eilės baigtinių skirtumų schema. *Ketvirtajame* skyriuje surastos būtinos ir pakankamos diskrečiojo sprendinio egzistavimo sąlygos, bei jo stabilumas pagal energetinę normą.

Penktajame skyriuje nagrinėjamas modelinis parabolinis uždavinys su nelokaliąja kraštine sąlyga kairiajame intervalo $(0, 1)$ krašte ir taškine sąlyga dešiniajame krašte [8A]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\\
u(x,0) &= \varphi(x),\\
u(0,t) &= \gamma u(a,t) + d(t), \;\; a \in [0,1],\\
u(1,t) &= \mu(t).
\end{aligned}$$

Šiame skyriuje pasiūlytas parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendimo būdas, kai pasinaudojant klasikinio uždavinio sprendinio išraiška per Gryno funkcijas uždavinio su nelokaliąja kraštine sąlyga sprendinio radimas suvedamas į antro tipo Volteros integralinę lygtį. Išnagrinėti gautos Volteros integralinės lygties branduoliai. Taip pat užrašytos Volteros integralinių lygčių išraiškos, kai nagrinėjamas uždavinys su viena arba abejomis antrojo tipo kraštinėmis sąlygomis.

Išvadose apibendrinti tyrimų rezultatai.

7. Kai kurie apibrėžimai, žymėjimai ir naudojamos sąvokos

Nagrinėjant tikrines reikšmes bus naudojami šie apibrėžimai ir žymėjimai. Disertacijoje tiriamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys priklauso nuo dviejų parametrų

$\gamma \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ir $\xi \in [0, 1]$.

7.1 APIBRĖŽIMAS. **Pastovioji tikrinė reikšmė.** Sakykime parametras ξ yra fiksuotas. Tikrinę reikšmę, kuri nepriklauso nuo Šturmo ir Liuvilio uždavinio nelokaliosios kraštinės sąlygos parametro γ vadinsime *pastoviąja tikrine reikšme*, o tikrinę reikšmę, kuri priklauso nuo parametro γ – *nepastoviąja tikrine reikšme*.

Jei $\lambda = q^2$ yra pastovioji tikrinė reikšmė, tai $q \in \mathbb{C}_q$ vadinsime *pastoviosios tikrinės reikšmės tašku*.

Kiekvienam parametrui $\xi \in [0, 1]$ galima apibrėžti aibes:

$$\begin{aligned}
\varXi &:= \{\xi \in [0,1]|, \text{ kuriems } \xi \text{ pastoviosios tikrinės reikšmės neegzistuoja}\};\\
R &:= \{\xi \in [0,1]|, \text{ kuriems } \xi \text{ egzistuoja pastov. ir nepastov. tikrinės reikšmės}\};\\
C &:= \{\xi \in [0,1]|, \text{ kuriems } \xi \text{ egzistuoja tik pastoviosios tikrinės reikšmės}\}.
\end{aligned}$$

Taip pat apibrėšime aibes:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_- &:= \{x \in \mathbb{R}|x < 0\}, \quad \mathbb{R}_{0-} := \{x \in \mathbb{R}|x \leqslant 0\},\\
\mathbb{R}_+ &:= \{x \in \mathbb{R}|x > 0\}, \quad \mathbb{R}_{0+} := \{x \in \mathbb{R}|x \geqslant 0\},
\end{aligned}$$

ir teigiamų sveikųjų skaičių $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}|n = km, k \in \mathbb{N}\}$, lyginių skaičių $\mathbb{N}_e = \{k \in \mathbb{N}_2|k \leqslant n\} \cup \{0\}$ ir nelyginių skaičių $\mathbb{N}_o = \{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_2|k \leqslant n\}$ poaibius.

7.1 *pastaba.* Disertacijoje raide γ bus žymimas nelokaliosios kraštinės sąlygos parametras ir funkcija $\gamma = \gamma(q) = \gamma(\sqrt{\lambda})$, kuri parodo parametro γ priklausomybę nuo Šturmo ir Liuvilio uždavinio tikrinių reikšmių.

7.2 APIBRĖŽIMAS. Funkcijos $w(z)$ a-reikšmėmis $a \in \bar{\mathbb{C}}$ vadinamos lygybės $w(z) = a$ šaknys.

Funkciją $\gamma(q)$, kurios pagalba galima rasti nepastoviąsias Šturmo ir Liuvilio uždavinio tikrines reikšmes $\lambda = q^2$, kaip šios funkcijos γ-reikšmes, vadinsime *charakteristine funkcija* (pirmojo tipo charakteristine funkcija). Pasirodė, kad charakteristinės funkcijos $\gamma = \gamma(q)$ tyrimas suteikia daug kokybinės informacijos apie Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektrą. Tikrinės reikšmės priklauso nuo Šturmo ir Liuvilio uždavinio parametro γ, t.y. $\lambda = \lambda(\gamma)$. Disertacijoje taip pat nagrinėjama funkcija $q = q(\gamma)$, čia $q = \sqrt{\lambda}$. Tačiau šios funkcijos yra daugiareikšmės, įgyjančios begalinį (skaitųjį) skaičių reikšmių. Vienareikšmės jos gali būti tik dalyje apibrėžimo srities. Tuo tarpu atvirkštinės priklausomybės $\gamma = \gamma(\lambda)$ arba $\gamma = \gamma(q)$ yra vienareikšmės funkcijos. Pastoviąsias tikrines reikšmes randame atskirai (ne iš charakteristinės funkcijos).

7.2 *pastaba.* Iš charakteristinės funkcijos randame q, o ne tikrines reikšmes $\lambda = q^2$. Tačiau žinant q vienareikšmiškai galime surasti ir λ. Todėl kalbėdami apie tikrinę reikšmę q arba $q = x$ realiuoju atveju, turėsime omenyje tikrinę reikšmę λ. Funkcijos $\gamma = \gamma(q)$ γ-reikšmes vadinsime *tikrinių reikšmių taškais*.

Dažniausiai nelokaliosios sąlygos parametras $\gamma \in \mathbb{R}$. Šiuo atveju domėsimės Šturmo ir Liuvilio uždavinio realiosiomis tikrinėmis reikšmėmis $\lambda \in \mathbb{R}$. Pastebėsime, kad be šio atvejo tikrinės reikšmės gali būti ir kompleksiškai jungtinės. Realiųjų tikrinių reikšmių atveju jos gali būti kartotinės.

Šiuo atveju (1 ir 2 skyriuose) vietoje $q \in \mathbb{C}_q$, nagrinėsime q tik spinduliuose $q = x \geqslant 0$ ir $q = -\mathrm{i}x$, $x \leqslant 0$. Teigiamos tikrinės reikšmės egzistuoja, kai spindulys $q = x > 0$, neigiamos tikrinės reikšmės, kai – $q = -\mathrm{i}x$, $x < 0$. Taškas $q = x = 0$ atitinka $\lambda = 0$. Šiuose spinduliuose funkcija $f : \mathbb{C}_q \to \mathbb{C}$ palieka du pėdsakus: $f_+(x) = f(x + \mathrm{i}0)$, kai $x \geqslant 0$ ir $f_-(x) = f(0 - \mathrm{i}x)$, kai $x \leqslant 0$. Funkcija f_+ atitinka teigiamas tikrines reikšmes, o funkcija f_- – neigiamas tikrines reikšmes. Visas realiąsias tikrines reikšmes susieja sąryšis

$$\lambda_k = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ -x^2, & \text{kai } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Jas nagrinėsime naudodami funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x), & \text{kai } x \geqslant 0, \\ f_-(x), & \text{kai } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Mūsų nagrinėjamais atvejais visos tokios f bus realiosios funkcijos, t. y. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Šios funkcijos vadinamos *realiosiomis charakteristinėmis* funkcijomis. Charakteristinė funkcija nagrinėjamuose uždaviniuose yra meromorfinė funkcija. Jos nulius žymėsime z_k, o polius p_k.

Taške $z = p$ galima apibrėžti meromorfinės funkcijos $F(z)$ *poliaus ženklą*:

$$\sigma_s(F, p) = \operatorname{sign}\big(\lim_{z \to p}(z - p)^s F(z)\big), s = 0, 1, \ldots. \tag{7.12}$$

7.3 *pastaba.* Jei $\sigma_s(F, p) = 0$, tai taškas $z = p$ yra polius, ir jo eilė yra žemesnė už s, arba $z = p$ yra analizinis taškas; jei $\sigma_s(F, p) = \infty$, tai taškas $z = p$ yra polius, ir jo eilė yra didesnė už s; kitais atvejais turime s-eilės polių.

7.4 *pastaba.* Jei $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, čia f, g yra sveikosios funkcijos ir $g(p) = 0$, $g'(p) \neq 0$, tada

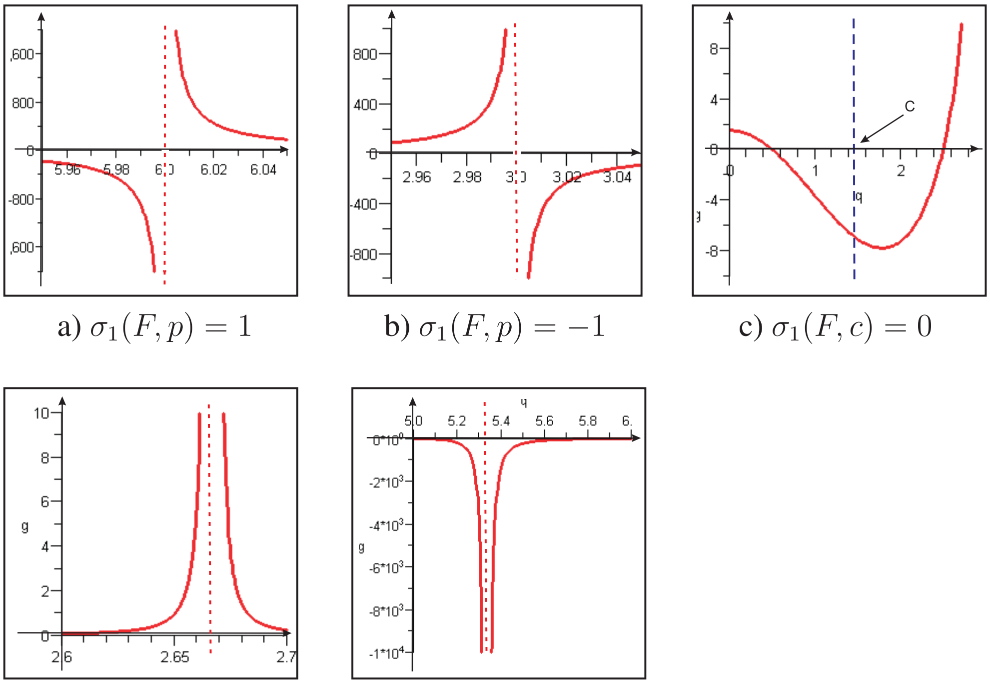
$$\sigma_1(F, p) = \operatorname{sign}\big(\lim_{z \to p}(z - p)F(z)\big) = \operatorname{sign} \operatorname*{Res}_{z=p} F(z) = \operatorname{sign}\frac{f(p)}{g'(p)}. \tag{7.13}$$

7.5 *pastaba.* Jei $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, čia f, g yra sveikosios funkcijos ir $g(p) = g'(p) = 0$, $g''(p) \neq 0$, tada

$$\sigma_2(F,p) = \operatorname{sign}\frac{f(p)}{g'(p)}. \tag{7.14}$$

7.6 *pastaba.* Pirmosios eilės poliaus ženklas pastoviosios tikrinės reikšmės taške

$$\sigma_1(F,p) = \operatorname{sign}\frac{f'(p)}{g''(p)}.$$

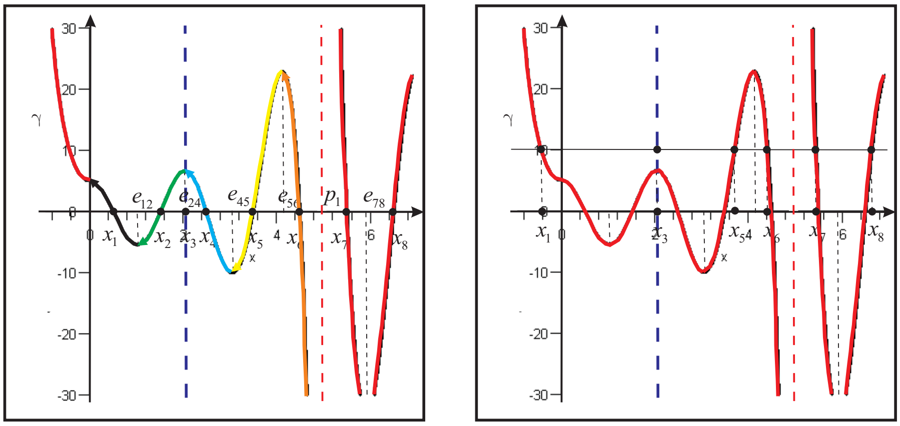


a) $\sigma_1(F,p) = 1$ b) $\sigma_1(F,p) = -1$ c) $\sigma_1(F,c) = 0$

d) $\sigma_2(F,p) = 1$ e) $\sigma_2(F,p) = -1$

1 pav. Poliai ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai

Realiuoju atveju, kai $F = \gamma_{l+}$, $l = 1,2,3$, polių ženklai $\sigma_1(F,p) = \pm 1$. Jei $\sigma_1(F,p) = 1$ (1 paveikslas, a)), tada, kai $\gamma >> 1$ egzistuoja realiosios tikrinės reikšmės taškas $q(\gamma) > p$ ir $\lim_{\gamma \to +\infty} q(\gamma) = p$, kai $\gamma << -1$ egzistuoja realiosios tikrinės reikšmės taškas $q(\gamma) < p$ ir $\lim_{\gamma \to -\infty} q(\gamma) = p$, bet tokių taškų nėra kitoje taško p pusėje. Jei $\sigma_1(F,p) = -1$ (1 paveikslas, b)), tada, kai $\gamma >> 1$, egzistuoja realiosios tikrinės reikšmės taškas $q(\gamma) < p$ ir $\lim_{\gamma \to +\infty} q(\gamma) = p$, taip pat ir, kai $\gamma << -1$, egzistuoja realiosios tikrinės reikšmės taškas $q(\gamma) > p$ ir $\lim_{\gamma \to -\infty} q(\gamma) = p$, tačiau tokių taškų nėra kitoje taško p pusėje. Jei $\sigma_1(F,p) = 0$ (1 paveikslas, c)), tada visiems γ egzistuoja pastoviosios tikrinės reikšmės taškas $c = p$.



a) b)

2 pav. Funkcijos $\gamma(x)$ grafikas

7.7 *pastaba.* Tegul funkcija F turi antrosios eilės polių p. Jei $\sigma_2(F,p) = 1$ (1 paveikslas, d)), tada, kai $\gamma >> 1$, egzistuoja du realiųjų tikrinių reikšmių taškai $q_1(\gamma) < p < q(\gamma)_2$ ir $\lim_{\gamma\to+\infty} q_1(\gamma) = \lim_{\gamma\to+\infty} q_2(\gamma) = p$, tačiau tokių taškų nėra, kai $\gamma << -1$. Jei $\sigma_2(F,p) = -1$ (1 paveikslas, e)), tada, kai $\gamma << -1$, egzistuoja du realiųjų tikrinių reikšmių taškai $q_1(\gamma) < p < q(\gamma)_2$, o $\lim_{\gamma\to+\infty} q_1(\gamma) = \lim_{\gamma\to+\infty} q_2(\gamma) = p$, ir tokių taškų nėra, kai $\gamma >> 1$.

Paprastai, realiųjų tikrinių reikšmių atveju $q = x \in \mathbb{R}$, viename grafike braižysime ir charakteristinę funkciją (2 paveikslas, ištisinė kreivė), ir pastoviąsias tikrines reikšmes (2 paveikslas, vertikali punktyrinė tamsiai mėlyna tiesė). Tai leidžia iš grafiko nustatyti tiek pastoviąsias, tiek nepastoviąsias tikrines reikšmes. Charakteristinės funkcijos asimptotes (paveiksle $x = p_1$), taip pat žymėsime punktyrine linija, tik raudonos spalvos ir siauresne, nei pastoviąsias tikrines reikšmes.

7.8 *pastaba.* Spausdintame disertacijos variante paveikslėliai atspausdinti pilkai, todėl spalvos nėra informatyvios, pavyzdžiui, „vertikali punktyrinė tamsiai mėlyna tiesė“. Šiuo atveju pagrindinę informaciją suteikia žodžiai „*vertikali punktyrinė tamsiai* mėlyna *tiesė*“. Elektroniniame variante (pridėtoje CD laikmenoje) galima naudotis papildoma spalvine informacija.

Pasinaudodami klasikiniu atveju $\gamma = 0$, sunumeruojame tikrinių reikšmių taškus $x_k = \pi k$, $k = 1, 2, ...$ (2 paveikslas, a)). x_3 – pastovioji tikrinė reikšmė (2 paveikslas, tamsiai mėlyna punktyrinė linija). 2 paveikslas, a) atv. parodytas tikrinių reikšmių kitimas keičiantis parametrui γ. $e_{k\,k+1}, k = 1, 2, \ldots$ – pažymėtas taškas, kuriame dvi skirtingos tikrinės reikšmės tampa kartotinėmis (2 paveikslas, a), taške e_{12} – tikrinės reikšmės x_1 ir x_2 tampa kartotinėmis), o $e_{k\,k+2}, k = 1, 2, \ldots$ – taškas, kuriame yra dvi tikrinės reikšmės ir dar egzistuoja pastovioji tikrinė reikšmė (2 paveikslas, a), taške e_{24} – susijungia tikrinės reikšmės x_2 ir x_4 ir egzistuoja pastovioji tikrinė reikšmė x_3). Toliau $p_k, k = 1, 2, \ldots$ žymimi funkcijos $\gamma(x)$ polių taškai (2 paveikslas, raudona punktyrinė linija).

Apibrėžimo sritį $x \in (-\infty, +\infty)$ suskaidome į intervalus (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots$:

$$a_k = \begin{cases} e_{k-2\,k}, & \text{jei taške } e_{k-2\,k} \text{ egzistuoja pastovioji tikrinė reikšmė,} \\ p_l, & \text{jei } e_{k-1\,k} = p_l,\ l = 1, 2, \ldots, \\ e_{k-1\,k}, & \text{kitais atvejais,} \end{cases}$$

ir

$$b_k = \begin{cases} e_{k\,k+2}, & \text{jei taške } e_{k\,k+2} \text{ egzistuoja pastovioji tikrinė reikšmė,} \\ p_l, & \text{jei } e_{k\,k+1} = p_l,\ l = 1, 2, \ldots, \\ e_{k\,k+1}, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Funkcijos $\gamma(x)$ siaurinį šiame intervale žymėsime $\gamma^k(x), k = 1, 2, \ldots$. Kiekviename iš šių intervalų $(a_k, b_k), k = 1, 2, \ldots$ aprašomas vienos realiosios tikrinės reikšmės kitimas.

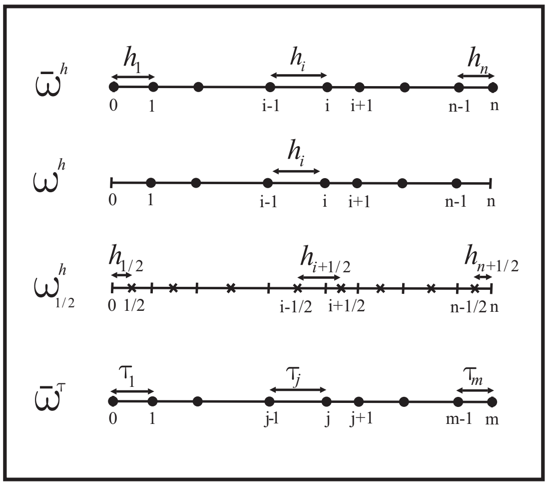
Kaip pavyzdį pateikiame 2 paveikslo, b) atv. Jame pavaizduotas konkretus spektro atvejis, kai parametras $\gamma = 10$. Šiame paveiksle x_1 žymi neigiamą tikrinę reikšmę, toliau eina pastovioji tikrinė reikšmė x_3. Kadangi nagrinėjame tik realiąsias tikrines reikšmes, tai 2 paveiksle, b) atv. nepažymėti kompleksinių tikrinių reikšmių taškai (x_2, x_4, $\gamma > 0$) atsiranda susijungus šioms dviems tikrinėms reikšmėms (x_2 ir x_4, $\gamma < 10$) į kartotinės tikrinės reikšmės tašką ($x_2 = x_4$, $\gamma = 10$).

7.9 *pastaba.* Tikrinė funkcija apibrėžiama pastovaus nenulinio daugiklio tikslumu. Nagrinėjant tikrines funkcijas, kurių reikšmės tam tikrame intervale yra vieno ženklo (teigiamos arba neigiamos), visada galima parinkti teigiamą tikrinę funkciją (3 skyrius).

7.10 *pastaba.* Šioje disertacijoje raidė x bus naudojama:

- kaip diferencialinės lygties nepriklausomas kintamasis (5 skyrius);
- kaip $x = q$ charakteristinės funkcijos γ-reikšmė, jeigu ji randama iš $\gamma = \gamma(q)$ lygties;
- aprašant kompleksinius skaičius $z = x + \mathrm{i}y$, čia ir toliau $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ – menamasis vienetas.

Disertacijos tekste indeksas formulių numeracijoje reiškia kraštinės sąlygos atvejį. Jeigu suformuluotas teiginys teisingas tik konkrečiu kraštinės sąlygos atveju, tai bus nurodyta skliausteliuose, jeigu nenurodyta – teiginys teisingas visais nagrinėjamų kraštinių sąlygų atvejais.



3 pav. Diskretieji tinklai

Aprašant funkcijas, naudosime pažymėjimus $f(x;\xi)$ arba $f(x)$, kai nagrinėsime funkciją $f(x,\xi)$ kaip vieno kintamojo funkciją su fiksuotu parametru ξ.

Ketvirtame disertacijos skyriuje nagrinėjant baigtinių skirtumų schemas stacionariajam uždaviniui bus naudojami šie žymėjimai.

Atkarpoje $[0, L]$ apibrėžkime diskretųjį tinklą $\bar{\omega} = \bar{\omega}^h = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = L\}$, $h_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leqslant i \leqslant n$. Formaliai laikysime, kad $h_0 = h_{n+1} = 0$, $x_{-1} = 0$, $x_{n+1} = l$. Naudosime papildomus diskrečiuosius tinklus: $\omega^h = \bar{\omega}^h \setminus \{x_0, x_n\}$, $\omega_0^h = \omega^h \cup \{x_0\}$, $\omega_1^h = \omega^h \cup \{x_n\}$, $\omega_{1/2}^h = \{x_{i+\frac{1}{2}} | x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2,\ -1 \leqslant i \leqslant n\}$, $h_{i+\frac{1}{2}} = (h_i + h_{i+1})/2$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (3 paveikslas). Aprašant parabolinį uždavinį papildomai dar bus naudojami diskretieji tinklai: $\bar{\omega}^\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}, \omega^\tau = \bar{\omega}^\tau \setminus \{t_0\}, \tau_j = t_j - t_{j-1}, 1 \leqslant j \leqslant m$. Apibrėžkime diskrečiuosius operatorius, skaliarines sandaugas ir normas:

$$(\delta U)_{i+\frac{1}{2}} := (U_{i+1} - U_i)/h_{i+1}, \qquad (\delta V)_i := (V_{i+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2}})/h_{i+\frac{1}{2}},$$

$$(U, V)_{\omega^h} := \sum_{i=0}^{n} U_i V_i h_{i+\frac{1}{2}}, \qquad (U, V)_{\omega^h_{1/2}} := \sum_{i=1}^{n} U_{i-\frac{1}{2}} V_{i-\frac{1}{2}} h_i,$$

$$\|Z\|_{\infty,\omega} := \max_{x \in \omega} |Z(x)|, \qquad \|U\|_{p,\bar{\omega}^h} := (\sum_{i=0}^{n} |U_i|^p h_{i+\frac{1}{2}})^{1/p}.$$

Jeigu U, V yra apibrėžtos tinklelyje $\omega^h = \omega^h$, ω_0^h, ω_1^h, tuomet $(U, V)_\omega = (U^0, V^0)_{\bar{\omega}^h}$, $\|U\|_p = \|U\|_p$, čia U^0, V^0 yra U, V nuliniai tęsiniai.

Trumpai žymėsime $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\omega}$, tinklelis pagal nutylėjimą sutampa su funkcijos apibrėžimo sritimi.

Funkcijų reikšmėms ne tinklo taškuose naudosime tiesinį interpoliavimą $\tilde{L}Z(x) := \frac{x_i - x}{h_i} Z_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} Z_i$ kai $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Taip pat naudosime integravimo dalimis formules:

$$\begin{aligned}
(V, \delta U)_{\omega^h} &= V_n U_{n-1/2} - V_0 U_{1/2} - (\delta V, U)_{\omega^h_{1/2}}, \\
(V, \delta U)_{\bar{\omega}^h} &= V_n U_{n+1/2} - V_0 U_{1/2} - (\delta V, U)_{\omega^h_{1/2}}, \\
(V, \delta U)_{\omega^h_1} &= V_n U_{n+1/2} - V_0 U_{1/2} - (\delta V, U)_{\omega^h_{1/2}}, \\
(V, \delta U)_{\omega^h_0} &= V_n U_{n-1/2} - V_0 U_{-1/2} - (\delta V, U)_{\omega^h_{1/2}}.
\end{aligned}$$

Jeigu $V_n = 0$ arba $U_{n+1/2} = 0$, ir $V_0 = 0$ arba $U_{-1/2} = 0$, tuomet teisinga paprastesnė integravimo dalimis formulė

$$(V, \delta U)_{\omega} = -(\delta V, U)_{\omega^h_{1/2}}, \qquad (7.15)$$

su $\omega = \bar{\omega}^h, \omega^h_1, \omega^h_0, \omega^h$.

1 skyrius

Šturmo ir Liuvilio uždavinys stacionariajam diferencialiniam operatoriui su viena nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

1.1. Šturmo ir Liuvilio uždavinys stacionariajam diferencialiniam operatoriui su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

Panašius diferencialinius Šturmo ir Liuvilio uždavinius su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis taip pat nagrinėja B. Bandyrskii, I. Lazurchak, V. Makarov, M. Sapagovas [5], R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė [15], G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos [62], A. Lomtatidze [76], V. A. Iljyn, E. I. Moiseev [51, 52, 53]. Taip pat šių uždavinių tikrines reikšmes tiria G. Infante [55, 54]

Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine, o kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

$$u''(t) + \lambda u(t) = 0, \quad t \in (0, 1), \tag{1.1}$$

$$u(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(1) = \gamma \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

tikrines reikšmes nagrinėjo R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė ir M. Sapagovas [15]. Šiame darbe gautos neteigiamų ir kartotinių tikrinių reikšmių egzistavimo sąlygos. Taip pat [15] straipsnyje nagrinėjamas (1.1)–(1.3) uždavinys, kai (1.3) sąlygoje integruojama intervale $[1/4, 3/4]$, arba kai abi kraštinės sąlygos yra nelokaliosios integralinės.

Straipsnyje [5] apibendrinti [15] rezultatai, kai antros eilės diferencialinėje lygtyje yra kintami koeficientai

$$u''(t) + [\lambda - q(t)]u(t) = 0, \quad t \in (0, 1),$$

čia $q(t)$ – dalimis tolydžioji funkcija ir $q(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [0,1]$. Ši diferencialinė lygtis nagrinėjama su (1.2)–(1.3) kraštinėmis sąlygomis, tik integruojama intervale $[1/4, 3/4]$. Straipsnyje [5] aprašytas funkcinis–diskretus metodas leidžia ištirti kokybines sprendinio savybes, tai yra nustatyti kada tikrinės reikšmės yra realiosios arba kompleksinės, kartotinės ar ne ir t.t.

Šiame disertacijos skyriuje tiriama vieno Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektro priklausomybė nuo nelokaliosios integralinės kraštinės sąlygos parametrų. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai atspausdinti straipsniuose [1A, 4A, 6A, 7A].

1.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime Šturmo ir Liuvilio uždavinį su viena klasikine sąlyga kairiajame krašte (taške $t = 0$)

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0,1), \tag{2.4}$$
$$u(0) = 0, \tag{2.5}$$

ir kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga:

$$u(1) = \gamma \int_0^\xi u(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{(1 atv.)} \qquad (2.6_1)$$
$$u(1) = \gamma \int_\xi^1 u(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{(2 atv.)} \qquad (2.6_2)$$

su parametrais $\gamma \in \bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ir $\xi \in [0,1]$.

1.2.1 *pastaba.* Kai $\gamma = \infty$, vietoje (2.6) kraštinių sąlygų, nagrinėsime

$$\int_0^\xi u(t)\mathrm{d}t = 0,\ \xi > 0 \text{ (1 atv.) ir } \int_\xi^1 u(t)\mathrm{d}t = 0,\ \xi < 1. \text{ (2 atv.)}$$

Bendruoju atveju tikrinės reikšmės $\lambda \in \mathbb{C}$ ir tikrinės funkcijos $u(t)$ yra kompleksinės funkcijos. Tirsime kaip šio uždavinio spektras priklauso nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų γ ir ξ.

Pastebėsime, kad kai $\xi = 1$ (1 atv.), ir kai $\xi = 0$ (2 atv.), gauname tą pačią integralinę kraštinę sąlygą (1.3) [15].

Kai $\gamma = 0$ arba $\xi = 0$ (2.4)–(2.6_1) uždavinyje, ir $\gamma = 0$ arba $\xi = 1$ (2.4)–(2.5), (2.6_2) uždavinyje, gauname klasikinį atvejį. Tuomet tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos yra:

$$\lambda_k = (\pi k)^2, \quad u_k(t) = \sin(\pi k t), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

1.3. Pagrindinės spektro savybės ir jo priklausomybė nuo uždavinio parametrų

Kai $\lambda = 0$, tuomet tikrinės funkcijos yra $u(t) = ct$. Įstatę šį sprendinį į antrąją kraštinę sąlygą, gauname

$$c = \gamma \int_0^\xi ct\mathrm{d}t = c\gamma\frac{\xi^2}{2} \quad (1 \text{ atv.}), \quad c = \gamma \int_\xi^1 ct\mathrm{d}t = c\gamma\frac{1-\xi^2}{2} \quad (2 \text{ atv.}),$$

t.y.

$$c\Big(1 - \gamma\frac{\xi^2}{2}\Big) = 0 \quad (1 \text{ atv.}), \quad c\Big(1 - \gamma\frac{1-\xi^2}{2}\Big) = 0 \quad (2 \text{ atv.}).$$

Netrivialus sprendinys ($c \neq 0$) egzistuoja, jei

$$1 - \gamma\frac{\xi^2}{2} = 0 \quad (1 \text{ atv.}), \quad 1 - \gamma\frac{1-\xi^2}{2} = 0 \quad (2 \text{ atv.}).$$

1.3.1 lema. *Tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{2}{\xi^2}$ (1 atv.), $\gamma = \frac{2}{1-\xi^2}$ (2 atv.).*

Bendruoju atveju, kai $\lambda \neq 0$, tikrinės funkcijos yra $u = c\sin(qt)$ ir tikrinės reikšmės $\lambda = q^2$, čia $q \in \mathbb{C}_q \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_q := \{q \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\, q > 0$ arba $\mathrm{Re}\, q = 0$, $\mathrm{Im}\, q > 0$, arba $q = 0\}$. Jos tenkina (2.4) lygtį ir (2.6) nelokaliąsias kraštines sąlygas.

Kai $\lambda \neq 0$ nelokalioji kraštinė sąlyga tenkinama, jei

$$c\,\sin q = c\,\gamma \int_0^\xi \sin(qt)\mathrm{d}t \quad (1 \text{ atv.}), \quad c\,\sin q = c\,\gamma \int_\xi^1 \sin(qt)\mathrm{d}t \quad (2 \text{ atv.}),$$

t.y.

$$c\big(\sin q - \gamma\frac{1-\cos(\xi q)}{q}\big) = 0 \ (1 \text{ atv.}), \ c\big(\sin q - \gamma\frac{\cos(\xi q) - \cos q}{q}\big) = 0 \ (2 \text{ atv.}).$$

Netrivialus sprendinys egzistuoja, jei $q,\ (q \neq 0)$ yra lygties

$$f_1(q) := 2\gamma\frac{\sin^2\frac{\xi q}{2}}{q^2} - \frac{\sin q}{q} = 0, \qquad (1 \text{ atv.}) \qquad (3.8_1)$$

$$f_2(q) := 2\gamma\frac{\sin\frac{(1+\xi)q}{2}\sin\frac{(1-\xi)q}{2}}{q^2} - \frac{\sin q}{q} = 0, \qquad (2 \text{ atv.}) \qquad (3.8_2)$$

šaknis.

Jeigu $\sin q = 0$ ir $\sin\frac{\xi q}{2} = 0$ (1 atv.), ir $\sin\frac{(1+\xi)q}{2} = 0$ arba $\sin\frac{(1-\xi)q}{2} = 0$ ir $\sin q = 0$ (2 atv.), tai (3.8) lygtys yra teisingos su visomis $\gamma \in \mathbb{C}$ reikšmėmis. Šiuo atveju gauname *pastoviąsias tikrines reikšmes*, kurios nepriklauso nuo parametro γ. Jei parametras ξ yra iracionalusis skaičius tokios tikrinės reikšmės neegzistuoja.

Tegul $\xi = r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Tarkime, kad m ir n $(n > m > 0)$ yra teigiami, tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai, kai $\xi \in (0, 1)$. Kai $\xi = 0$ tarsime, kad $m = 0$, $n = 1$, ir kai $\xi = 1$, tarsime, kad $m = 1$, $n = 1$.

1.3.2 lema. *Pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliesiems* $\xi = \frac{m}{n} \in [0,1]$, *ir šios tikrinės reikšmės yra lygios:* $\lambda_k = (n\pi k)^2, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_e$ *ir* $\lambda_k = (2n\pi k)^2, k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_o$ *(1 atv.);* $\lambda_k = (n\pi k)^2, k \in \mathbb{N}$, $n - m \in \mathbb{N}_e$ *ir* $\lambda_k = (2n\pi k)^2, k \in \mathbb{N}$, $n - m \in \mathbb{N}_o$ *(2 atv.)*

Įrodymas. Apibrėžkime funkcijas $S_j(z) = \frac{\sin(jz)}{\sin z}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Kai $j \geqslant 2$, jų išraiškas galime gauti iš Muavro formulės:

$$S_{2k}(z) = 2k\cos^{2k-1} z - \tbinom{2k}{3}\cos^{2k-3} z \sin^2 z + \ldots + (-1)^{k-1} 2k \cos z \sin^{2k-2} z,$$
$$S_{2k+1}(z) = (2k+1)\cos^{2k} z - \tbinom{2k+1}{3}\cos^{2k-2} z \sin^2 z + \ldots + (-1)^k \sin^{2k} z.$$

Pastebėsime, kad $S_1(z) \equiv 1$, $S_0(z) \equiv 0$ ir, kai $j \geqslant 2$, funkcijos $S_j(z)$ yra sveikosios transcendenčiosios funkcijos, kurių didėjimo eilė lygi vienetui. Funkcijos $\sin z$ ir $S_j(z)$ neturi bendrų nulių. Tada, jei $0 < m < n$, funkcijų $\sin(mz)$ ir $\sin(nz)$ bendri nuliai yra ir funkcijų $\sin z$ nuliai. Todėl, šiuo atveju, funkcijos $S_n(z)$ ir $S_m(z)$ taip pat neturi bendrų nulių.

Pirmuoju atveju iš (3.8_1) lygties gauname:

$$\sin\frac{q}{n} \cdot \Big[\frac{2\gamma}{q} S^2_{m/2}\Big(\frac{q}{n}\Big)\sin\frac{q}{n} - S_n\Big(\frac{q}{n}\Big)\Big] = 0,\ m \in \mathbb{N}_e,$$
$$\sin\frac{q}{2n} \cdot \Big[\frac{2\gamma}{q} S^2_{m}\Big(\frac{q}{2n}\Big)\sin\frac{q}{2n} - S_{2n}\Big(\frac{q}{2n}\Big)\Big] = 0,\ m \in \mathbb{N}_o.$$

Antruoju atveju iš (3.8_2) lygties seka:

$$\sin\frac{q}{n} \cdot \Big[\frac{2\gamma}{q} S_{(n+m)/2}\Big(\frac{q}{n}\Big) S_{(n-m)/2}\Big(\frac{q}{n}\Big)\sin\frac{q}{n} - S_n\Big(\frac{q}{n}\Big)\Big] = 0,\ n - m \in \mathbb{N}_e,$$
$$\sin\frac{q}{2n} \cdot \Big[\frac{2\gamma}{q} S_{n+m}\Big(\frac{q}{2n}\Big) S_{n-m}\Big(\frac{q}{2n}\Big)\sin\frac{q}{2n} - S_{2n}\Big(\frac{q}{2n}\Big)\Big] = 0,\ n - m \in \mathbb{N}_o.$$

Pastebėsime, kad skaičiai $n - m$ ir $n + m$ abu kartu yra lyginiai arba nelyginiai.

Jei $\sin\frac{q}{n} = 0$, gauname pastoviąsias tikrines reikšmes, kai $m \in \mathbb{N}_e$ (1 atv.) ir $n - m \in \mathbb{N}_e$ (2 atv.). Iš šios lygties gauname, kad $q = n\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, todėl $\lambda_k = (n\pi k)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Jei $\sin\frac{q}{2n} = 0$, egzistuoja pastoviosios tikrinės reikšmės, kai $m \in \mathbb{N}_o$ (1 atv.) ir $n - m \in \mathbb{N}_o$ (2 atv.). Todėl $q_k = 2n\pi k$, $k \in \mathbb{N}$ (1 atv.) ir $\lambda_k = (2n\pi k)^2$, $k \in \mathbb{N}$ (2 atv.). ■

1.3.1 *pastaba.* Funkcijos $S_j(z) = P_j(\cos z)$, čia P_j yra daugianaris (su sveikaisiais koeficientais) ir $\deg P_j = j - 1$, $j > 1$:

$$P_{2k}(z) = 2kz^{2k-1} - \binom{2k}{3} z^{2k-3}(1 - z^2) + \cdots + (-1)^{k-1} 2kz(1 - z^2)^{k-1},$$
$$P_{2k+1}(z) = (2k + 1)z^{2k} - \binom{2k+1}{3} z^{2k-2}(1 - z^2) + \cdots + (-1)^k (1 - z^2)^k,$$

ir $P_0 \equiv 0$, $P_1 \equiv 1$.

1.3.2 *pastaba.* Kai $n = 1$ ($m = 0$ (1 atv.) arba $m = 1$ (2 atv.)) egzistuoja tik pastoviosios tikrinės reikšmės.

Apibrėžkime aibes:

$$\begin{aligned}
&\Xi_i := (0, 1) \backslash R, \\
&C_1 := \{0\}, \quad C_2 := \{1\}, \\
&R_1 := \mathbb{Q} \cup (0, 1], \quad R_2 := \mathbb{Q} \cup [0, 1)
\end{aligned}$$

Analizuokime nepastoviąsias tikrines reikšmes. Apibrėžkime funkcijas:

$$\begin{aligned}
&f_{1r}(z) := 2\gamma P^2_{m/2}\Big(\cos \frac{z}{n}\Big) \frac{\sin \frac{z}{n}}{z} - P_n\Big(\cos \frac{z}{n}\Big), \ 0 < m \in \mathbb{N}_e; \\
&f_{1r}(z) := 2\gamma P^2_{m}\Big(\cos \frac{z}{2n}\Big) \frac{\sin \frac{z}{2n}}{z} P_{2n}\Big(\cos \frac{z}{2n}\Big), \ m \in \mathbb{N}_o
\end{aligned}$$

pirmuoju atveju, ir

$$\begin{aligned}
f_{2r}(z) &:= 2\gamma P_{\frac{n+m}{2}}\Big(\cos \frac{z}{n}\Big) P_{\frac{n-m}{2}}\Big(\cos \frac{z}{n}\Big) \frac{\sin \frac{z}{n}}{z} - P_n\Big(\cos \frac{z}{n}\Big) = 0, \\
&\quad 0 < n - m \in \mathbb{N}_e; \\
f_{2r}(z) &:= 2\gamma P_{n+m}\Big(\cos \frac{z}{2n}\Big) P_{n-m}\Big(\cos \frac{z}{2n}\Big) \frac{\sin \frac{z}{2n}}{z} - P_{2n}\Big(\cos \frac{z}{2n}\Big) = 0, \\
&\quad n - m \in \mathbb{N}_o
\end{aligned}$$

antruoju atveju.

1.3.3 *pastaba.* Kai $\gamma = \infty$, apibrėžkime:

$$f_{1r}(z) := 2P^2_{m/2}\Big(\cos\frac{z}{n}\Big)\frac{\sin\frac{z}{n}}{z},\ 0 < m \in \mathbb{N}_e;$$

$$f_{1r}(z) := 2P^2_{m}\Big(\cos\frac{z}{2n}\Big)\frac{\sin\frac{z}{2n}}{z},\ m \in \mathbb{N}_o;$$

$$f_{2r}(z) := 2P_{\frac{n+m}{2}}\Big(\cos\frac{z}{n}\Big)P_{\frac{n-m}{2}}\Big(\cos\frac{z}{n}\Big)\frac{\sin\frac{z}{n}}{z},\ 0 < n-m \in \mathbb{N}_e;$$

$$f_{2r}(z) := 2P_{n+m}\Big(\cos\frac{z}{2n}\Big)P_{n-m}\Big(\cos\frac{z}{2n}\Big)\frac{\sin\frac{z}{2n}}{z} - P_{2n}\Big(\cos\frac{z}{2n}\Big) = 0,$$
$$n - m \in \mathbb{N}_o.$$

1.3.3 lema. *Kiekvienam parametrui $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$, kiekvienam $\xi \in (0,1]$ (1 atv.) ir kiekvienam $\xi \in [0,1)$ (2 atv.) egzistuoja skaitusis skaičius nepastoviųjų tikrinių reikšmių. Taškas $\lambda = \infty$ yra šių tikrinių reikšmių sankaupos taškas.*

Įrodymas. Funkcijos $f_k(\sqrt{\lambda})$, $k = 1,2$ iracionaliesiems ξ ir funkcijos $f_{kr}(\sqrt{\lambda})$, $k = 1,2$ racionaliesiems $\xi = r = m/n$ yra sveikosios transcendenčiosios funkcijos, kurių didėjimo eilė yra $\frac{1}{2}$. Šios funkcijos kiekvieną savo γ-reikšmę įgyja begalybę (skaitųjį skaičių) kartų, ir $\lambda = \infty$ yra γ-reikšmių sankaupos taškas [80]. ■

Atskiru atveju funkcijos $f_i(\sqrt{\lambda})$, $f_{ir}(\sqrt{\lambda})$ turi begalybę (skaitųjį skaičių) nulių. Visas nepastoviąsias tikrines reikšmes (kurios priklauso nuo parametro γ) galime gauti kaip meromorfinių funkcijų, apibrėžtų aibėje $\mathbb{C}_q$, γ-reikšmes:

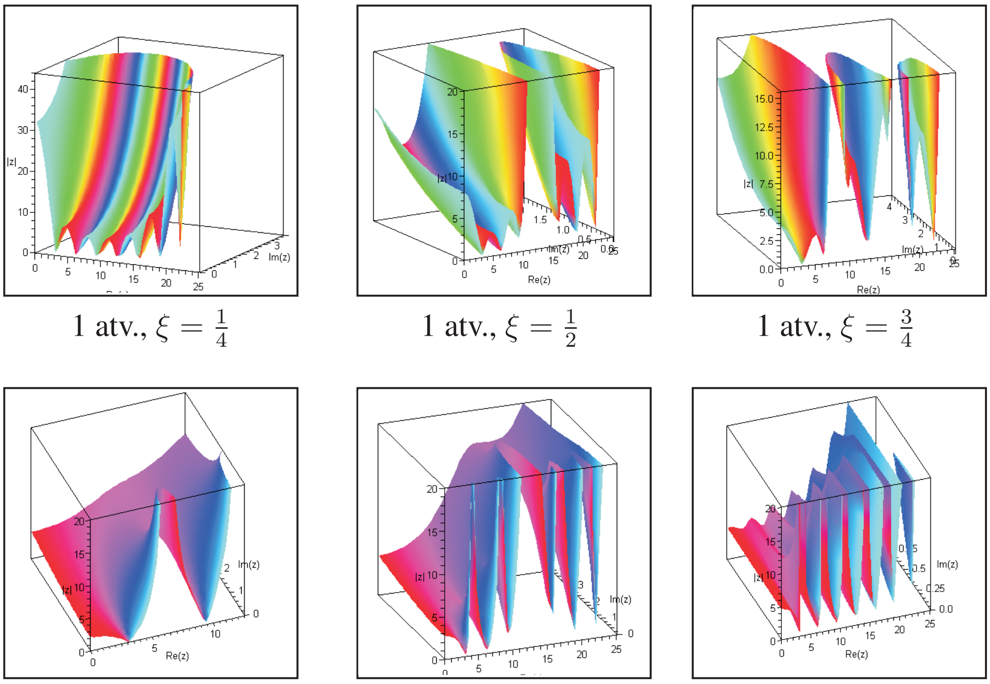
$$\gamma_1(q) := \frac{q\sin q}{1-\cos(\xi q)} = \frac{q\sin q}{2\sin^2(\xi q/2)}, \qquad \text{kai } \xi \in (0,1), \xi \notin \mathbb{Q}, \tag{3.9}$$

$$\gamma_{1r}(q) := \begin{cases} \dfrac{qP_n(\cos(\frac{q}{n}))}{2\sin(\frac{q}{n})P^2_{\frac{m}{2}}(\cos(\frac{q}{n}))}, & 0 < m \in \mathbb{N}_e, \\[2ex] \dfrac{qP_{2n}(\cos(\frac{q}{2n}))}{2\sin(\frac{q}{2n})P^2_{m}(\cos(\frac{q}{2n}))}, & m \in \mathbb{N}_o, \end{cases} \qquad \text{kai } \xi = r \in \mathbb{Q}(0,1), \tag{3.10}$$

pirmuoju atveju, ir

$$\gamma_2(q) := \frac{q\sin q}{2\sin((1+\xi)q/2)\sin((1-\xi)q/2)}, \qquad \text{kai } \xi \in (0,1), \xi \notin \mathbb{Q}, \tag{3.11}$$

$$\gamma_{2r}(q) := \begin{cases} \dfrac{qP_n(\cos(\frac{q}{n}))}{2\sin(\frac{q}{n})P_{\frac{n+m}{2}}(\cos(\frac{q}{n}))P_{\frac{n-m}{2}}(\cos(\frac{q}{n}))}, & 0 < n-m \in \mathbb{N}_e, \\[2ex] \dfrac{qP_{2n}(\cos(\frac{q}{2n}))}{2\sin(\frac{q}{2n})P_{n+m}(\cos(\frac{q}{2n}))P_{n-m}(\cos(\frac{q}{2n}))}, & n-m \in \mathbb{N}_o, \end{cases}$$
$$\text{kai } \xi = r \in \mathbb{Q}(0,1), \tag{3.12}$$



1 atv., $\xi = \frac{1}{4}$ | 1 atv., $\xi = \frac{1}{2}$ | 1 atv., $\xi = \frac{3}{4}$

1 atv., $\xi = 1$; 2 atv., $\xi = 0$ | 2 atv., $\xi = \frac{1}{2}$ | 2 atv., $\xi = \frac{3}{4}$

1.1 pav. Funkcijos $|\gamma_{1r}(z\pi)|$ ir $|\gamma_{2r}(z\pi)|$ įvairiems ξ

antruoju atveju. Funkcijas γ_k galime naudoti taip pat ir racionaliesiems ξ, tačiau šiuo atveju pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai yra izoliuoti ypatingieji taškai.

1.3.4 *pastaba.* Kai $\gamma = \infty$, funkcijų $\gamma_1(q)$, $\gamma_2(q)$, $\gamma_{1r}(q)$,$\gamma_{2r}(q)$ poliai yra uždavinių (2.4)–(2.6$_1$) arba (2.4)–(2.5),(2.6$_2$) tikrinės reikšmės.

Funkcijų $|\gamma_{1r}(z\pi)|$ ir $|\gamma_{2r}(z\pi)|$ grafikai įvairioms racionalaus parametro ξ reikšmėms pateikti 1.1 paveiksle. Šiuose grafikuose spalva žymi arg$\gamma_{1r}(2\pi)$, arg$\gamma_{2r}(2\pi)$. Kadangi $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, ir daugianariai P_n turi realiuosius koeficientus, gauname panašias funkcijų γ_k ir γ_{kr} savybes: $\overline{\gamma(z)} = \gamma(\bar{z})$, $\overline{\gamma_r(z)} = \gamma_r(\bar{z})$. Taigi, šių funkcijų grafikai yra nubraižyti tik, kai $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ ir $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$. Grafikuose funkcija $\gamma_{kr}(z\pi)$ pavaizduota vietoje funkcijos $\gamma_{kr}(z)$. Šiuo atveju, pirmosios funkcijos nuliai yra taškai k, $k \in \mathbb{N}$. Kompleksinės funkcijos modulis parodo šios funkcijos nulius ir polius. Visuose pateiktuose grafikuose funkcijos nuliai ir poliai yra realiojoje ašyje, ir funkcija didėja, kai $\mathrm{Im}\, z$ didėja. Toliau pagrindines šių funkcijų savybes suformuluosime kaip teiginį ir pastabas.

1.3.1 teiginys. *Visi meromorfinių funkcijų γ_1, γ_{1r}, γ_2, γ_{2r} nuliai ir poliai priklauso teigiamai realiosios ašies daliai.*

Įrodymas. Įrodymas seka iš (3.9), (3.11) ir sinuso funkcijos savybių (visi šios funkcijos nuliai yra realieji skaičiai $q = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$). Taigi, $\mathbb{C}_q$ egzistuoja tik teigiami nuliai ir poliai. ■

1.3.5 *pastaba.* Jei ξ yra iracionalusis skaičius, tai $z_j = \pi j, j \in \mathbb{N}$ yra funkcijų γ_1, γ_2 nuliai. Pirmuoju atveju taškai $p_k = 2\pi k/\xi, k \in \mathbb{N}$ yra antrosios eilės poliai ((3.9) formulė), antruoju atveju taškai $p_k = 2\pi k/(1+\xi)$, $k \in \mathbb{N}$ ir $\tilde{p}_l = 2\pi l/(1-\xi)$, $l \in \mathbb{N}$ yra pirmosios eilės poliai ((3.11) formulė).

1.3.6 *pastaba.* Kai $\xi = r = m/n \in \mathbb{Q}$ dalis funkcijų γ_1, γ_2 nulių z_j sutampa su poliais p_k arba p_l. Pirmuoju atveju taškai $p_k = \pi k/m$, $k \in \mathbb{N}_{2n}$ yra poliai. Jie yra antrosios eilės poliai, išskyrus $k \in \mathbb{N}_{mn}, m \in \mathbb{N}_e$ ir $k \in \mathbb{N}_{2mn}, m \in \mathbb{N}_o$ (sutampa su pastoviųjų tikrinių reikšmių atveju), kai jie yra pirmosios eilės poliai. Kai $m = 1$ ir $m = 2$ nėra antrosios eilės polių. Antruoju atveju, jei pora (n, m) yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, tai poros $(m+n, m-n), (m+n, n), (m-n, n)$ taip pat yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Turime dvi polių šeimas: $p_k = \pi k/(n+m)$, $k \in \mathbb{N}_{2n}$, ir $\tilde{p}_l = \pi l/(n-m)$, $l \in \mathbb{N}_{2n}$. Pirmosios šeimos poliai sutampa su antrosios šeimos poliais taškuose $q_i = \pi i$, $i \in \mathbb{N}_n$, $n - m \in \mathbb{N}_e$ arba $q_k = \pi i$, $i \in \mathbb{N}_{2n}$, $n - m \in \mathbb{N}_o$. Šie taškai, taip pat yra sinuso funkcijos nuliai (sutampa su pastoviųjų tikrinių reikšmių atveju). Taigi, antruoju atveju visi taškai p_k, $k \in \mathbb{N}_{2n}$ arba $\tilde{p}_l$, $l \in \mathbb{N}_{2n}$ yra pirmosios eilės poliai.

1.3.7 *pastaba.* Visus polius p_k, $k \in \mathbb{N}$ galime išrašyti didėjančia tvarka, t.y. $p_1 < p_2 < \cdots < p_k = p_{k+1} < \ldots$. Čia p_k yra pirmosios eilės polius, sutampantis su tašku, kuriame yra pastovioji tikrinė reikšmė. Formaliai pažymėsime $p_0 = 0$.

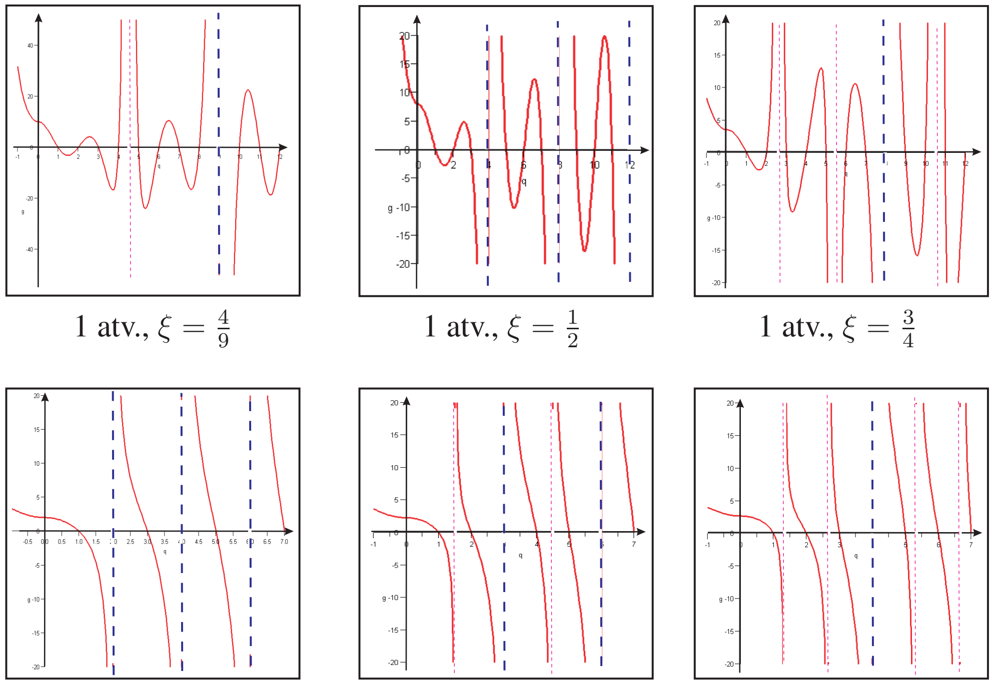
Iš nelygybių $\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,q| \leqslant |\sin q| \leqslant \mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,q)$ gauname įverčius

$$\frac{|q|\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,q|}{2\mathrm{ch}^{\,2}(\xi\mathrm{Im}\,q/2)} \leqslant |\gamma_1| \leqslant \frac{|q|\mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,q)}{2\mathrm{sh}^{\,2}|\xi\mathrm{Im}\,q/2|}, \tag{3.13}$$

$$\frac{|q|\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,q|}{2\mathrm{ch}\,((1-\xi)\mathrm{Im}\,q/2)\mathrm{ch}\,((1-\xi)\mathrm{Im}\,q/2)} \leqslant$$

$$|\gamma_2| \leqslant \frac{|q|\mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,q)}{2\mathrm{sh}\,|(1+\xi)\mathrm{Im}\,q/2|\mathrm{sh}\,|(1-\xi)\mathrm{Im}\,q/2|}. \tag{3.14}$$

1.3.1 *išvada.* Teisingos šios ribos: $\lim\limits_{\mathrm{Im}\,q\to\pm\infty} \gamma_k = \infty$, k=1,2.



1 atv., $\xi = \frac{4}{9}$ 1 atv., $\xi = \frac{1}{2}$ 1 atv., $\xi = \frac{3}{4}$

1 atv., $\xi = 1$; 2 atv., $\xi = 0$ 2 atv., $\xi = \frac{1}{3}$ 2 atv., $\xi = \frac{1}{2}$

1.2 pav. Funkcijos $\gamma_1(x\pi;\xi)$ ir $\gamma_2(x\pi;\xi)$

1.4. Uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga realiosios tikrinės reikšmės

Kompleksinėms funkcijoms (3.9) ir (3.11) realiosios charakteristinės funkcijos gali būti užrašytos taip:

$$\gamma_1(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{1-}(x;\xi) &= \dfrac{x\mathrm{sh}\, x}{2\mathrm{sh}^{\,2}(\frac{\xi x}{2})}, \quad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{1+}(x;\xi) &= \dfrac{x\sin x}{2\sin^2(\frac{\xi x}{2})}, \quad \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{4.15$_1$}$$

$$\gamma_2(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{2-}(x;\xi) &= \dfrac{x\mathrm{sh}\, x}{2\mathrm{sh}\,(\frac{(1+\xi)x}{2})\mathrm{sh}\,(\frac{(1-\xi)x}{2})}, \quad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{2+}(x;\xi) &= \dfrac{x\sin x}{2\sin(\frac{(1+\xi)x}{2})\sin(\frac{(1-\xi)x}{2})}, \quad \text{kai } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.15$_2$}$$

Funkcijų $\gamma_1(x;\xi)$ ir $\gamma_2(x;\xi)$ grafikai įvairioms parametro ξ reikšmėms yra pateikti 1.2 paveiksle.

Išrašykime polius p_k, $k \in \mathbb{N}$ didėjančia tvarka (1.3.7 pastaba). Funkcijos

$\gamma_{1+}(x)$ ir $\gamma_{2+}(x)$ yra apibrėžtos intervaluose $(\alpha, \beta) = (p_{k-1}, p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, čia $p_{k-1} < p_k$.

1.4.1 teiginys. *Funkcijos $\gamma_{1-}(x;\xi)$ ir $\gamma_{2-}(x;\xi)$ yra monotoniškai mažėjančios funkcijos, kai $x < 0$, visiems $\xi \in (0,1)$ ir kai $\xi = 0$ (2 atv.) (kai $\xi = 1$ (1 atv.)). Funkcija $\gamma_{2+}(x;\xi)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija kiekviename intervale (α, β) visiems $\xi \in (0,1)$ ir kai $\xi = 0$ (2 atv.)(kai $\xi = 1$ (1 atv.)).*

Įrodymas. Funkcijos $\gamma_{1-}(x)$ ir $\gamma_{2-}(x)$ yra lyginės, kai $x \in \mathbb{R}$, o $\gamma_{1-}(0) = \frac{2}{\xi^2}$, $\gamma_{2-}(0) = \frac{2}{1-\xi^2}$ ir $\gamma_{1-}(+\infty) = \gamma_{2-}(+\infty) = +\infty$. Todėl, galima parodyti, kad šios funkcijos yra didėjančios intervale $(0, +\infty)$.

Nagrinėkime funkciją $y_1(x) := x \,\mathrm{cth}\, x$, $x > 0$. Akivaizdu, kad $\mathrm{sh}\, x > x$. Taigi,

$$y_1'(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(2x) - 2x}{2\mathrm{sh}^2 x} > 0,$$

ir $y_1(x)$ yra teigiama didėjanti funkcija, kai $x > 0$. Tada $\frac{1}{y_1(x)} = \frac{1}{x}\mathrm{th}\, x$ yra teigiama mažėjanti funkcija, ir jos išvestinė yra neigiama.

Nagrinėkime funkciją $y(\xi, x) := \frac{1}{\xi}\mathrm{th}\,(\xi x) - \mathrm{th}\, x$, $x > 0$ ir $\xi \in (0,1)$. Šios funkcijos ribos

$$\lim_{\xi \to 0+} y(\xi; x) = x - \mathrm{th}\, x > 0, \quad \lim_{\xi \to 1-} y(\xi; x) = 0 \tag{4.16}$$

visiems $x > 0$. Jos išvestinė ξ atžvilgiu

$$y'(\xi; x) = \Big(\frac{1}{\xi}\mathrm{th}\,(\xi x)\Big)' = x\Big(\frac{1}{\xi x}\mathrm{th}\,(\xi x)\Big)' < 0.$$

Taigi, $y(\xi; x)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $\xi \in (0,1)$ ir iš (4.16) gauname, kad $y(\xi; x) > 0$ visiems $\xi \in (0,1)$ ir visiems $x > 0$.

Nagrinėkime funkciją $y_2(x, \xi) := \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{sh}\,(\xi x)}$, $x > 0$. Jos išvestinė (pagal x):

$$y_2'(x;\xi) = \frac{\mathrm{ch}\, x \mathrm{sh}\,(\xi x) - \xi \mathrm{ch}\,(\xi x) \mathrm{sh}\, x}{\mathrm{sh}^2(\xi x)} = \frac{\xi y(\xi, x) \mathrm{ch}\, x \mathrm{ch}\,(\xi x)}{\mathrm{sh}^2(\xi x)} > 0.$$

Taigi, $y_2(x;\xi)$ yra teigiama didėjanti funkcija visiems $x > 0$ ir $\xi \in (0,1)$.

Funkcija

$$\gamma_{1-}(x;\xi) = 2\frac{\frac{x}{2}\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}\Big(\frac{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,(\frac{\xi x}{2})}\Big)^2 = 2y_1\big(\tfrac{1}{2}x\big) \cdot y_2\big(\tfrac{1}{2}x;\xi\big) \cdot y_2\big(\tfrac{1}{2}x;\xi\big)$$

yra monotoniškai didėjanti funkcija, kai $x > 0$, kaip teigiamų monotoniškai didėjančių funkcijų sandauga. Kai $\xi = 1$, funkcija $y_2 \equiv 1$, ir šiuo atveju teiginys taip pat teisingas.

Funkcija

$$\gamma_{2-}(x;\xi) = \frac{x}{2}\mathrm{cth}\left(\frac{(1-\xi)x}{2}\right) + \frac{x}{2}\mathrm{cth}\left(\frac{(1+\xi)x}{2}\right)$$
$$= \frac{y_1\left(\frac{1-\xi}{2}x\right)}{1-\xi} + \frac{y_1\left(\frac{1+\xi}{2}x\right)}{1+\xi}$$

yra teigiama monotoniškai didėjanti funkcija, kai $x > 0$, kaip teigiamų monotoniškai didėjančių funkcijų suma.

Nagrinėkime funkciją $y_3(x) := x\mathrm{ctg}\, x$, $x > 0$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Akivaizdu, kad $\sin x < x$. Taigi,

$$y_3'(x) = \frac{\sin(2x) - 2x}{2\sin^2 x} < 0,$$

ir $y_3(x)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija intervaluose $(\pi(k-1), \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Funkcija

$$\gamma_{2+}(x;\xi) = \frac{x}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{(1-\xi)x}{2}\right) + \frac{x}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{(1+\xi)x}{2}\right)$$
$$= \frac{y_3\left(\frac{1-\xi}{2}x\right)}{1-\xi} + \frac{y_3\left(\frac{1+\xi}{2}x\right)}{1+\xi}$$

yra mažėjanti funkcija (kaip mažėjančių funkcijų suma) kiekviename intervale (α, β). Funkcija $\gamma_{2+}(x, 0) = 2y_3\left(\frac{x}{2}\right)$, ir šiuo atveju teiginys taip pat teisingas. ■

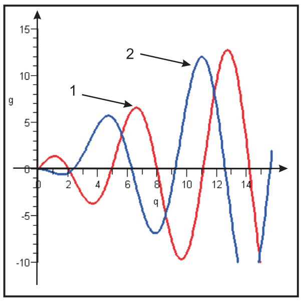
Trečiajame skirsnyje parodėme, kad $\lambda = 0$, tada ir tik tada, kai $\gamma = \gamma_0$ (1.3.1 lema), ir $\gamma_0 = \frac{2}{\xi^2}$, $\xi \in (0, 1]$ (1 atv.), $\gamma_0 = \frac{2}{1-\xi^2}$, $\xi \in [0, 1)$ (2 atv.). Iš 1.4.1 teiginio seka keletas rezultatų.

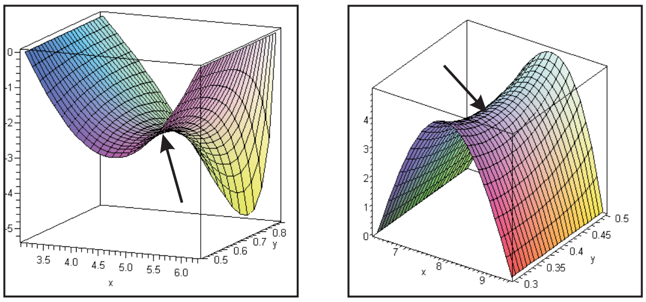
1.4.1 lema. *Kai $\gamma > \gamma_0$ egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, o kai $\gamma \leqslant \gamma_0$ neigiamų tikrinių reikšmių nėra.*

Įrodymas. Funkcijos $\gamma_{1-}(x)$ ir $\gamma_{2-}(x)$ yra monotoniškai mažėjančios funkcijos, kai $x < 0$, $\gamma_{1-}(-\infty) = \gamma_{2-}(-\infty) = +\infty$ ir $\gamma_{1-}(0) = \frac{2}{\xi^2}$, $\gamma_{2-}(0) = \frac{2}{1-\xi^2}$. Todėl, lygtis $\gamma = \gamma_{k-}(x)$, $k = 1, 2$ turi neigiamą šaknį tik, kai $\gamma > \gamma_0$. ■

1.4.2 lema. *Kai γ yra realusis skaičius, visos uždavinio* (2.4)–(2.5), (2.6$_2$) *tikrinės reikšmės yra realiosios. Kiekviena teigiama tikrinė reikšmė $\lambda_k(\gamma) = x_k^2(\gamma)$, čia $x_k \in (p_{k-1}, p_k)$, jei $p_{k-1} < p_k$, arba $x_k = p_k$, jei $p_{k-1} = p_k$.*

Įrodymas. Įrodymas seka iš 1.4.1 teiginio funkcijai γ_2, nepastoviųjų tikrinių reikšmių atveju, nes visos pastoviosios tikrinės reikšmės yra realiosios ir teigiamos. ■





a) b)

1.3 pav. Funkcijos $h_1(x)$ (1 kreivė) ir $h_2(x)$ (2 kreivė)

1.4 pav. Funkcija $\gamma_{1+}(x,\xi)$

1.4.1 *pastaba.* Pasinaudodami klasikiniu atveju, sunumeruojame tikrines reikšmes $x_k(0) = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Antruoju kraštinių sąlygų atveju gauname asimptotines tikrinių reikšmių savybes.

1.4.1 *išvada.* Uždaviniui (2.4)–(2.5), (2.6$_2$) teisingos savybės:

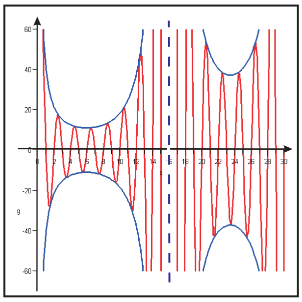
$$\lim_{\gamma\to-\infty} x_k(\gamma) = p_k, \quad \lim_{\gamma\to+\infty} x_k(\gamma) = p_{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \lim_{\gamma\to+\infty} x_1(\gamma) = -\infty.$$

Pirmuoju kraštinių sąlygų atveju spektras nėra toks paprastas. Šiuo atveju realiesiems γ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės. Dažnai svarbu žinoti, kada visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir nekartotinės, t.y. kada nagrinėjamo uždavinio spektras yra panašus į klasikinio uždavinio. Kadangi kokybinis šaknų pasiskirstymas priklauso nuo parametrų γ ir ξ, svarbu surasti tokį γ intervalą, kuriame uždavinio spektras pasižymi šia savybe.

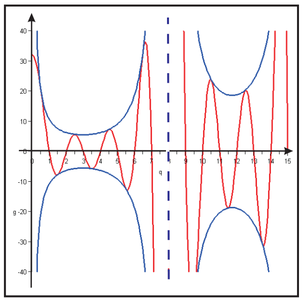
Funkcijų $h_1(x) := \sin x + x\cos x$, $h_2(x) := 1 - \cos x - x\sin x$ grafikai, kai $x \geqslant 0$, yra pateikti 1.3 paveiksle. Tarkime, kad x_1, x_2, x_3 yra pirmi trys teigiami funkcijos h_1 nuliai, o z_1, z_2, z_3, z_4 yra pirmi keturi teigiami funkcijos h_2 nuliai. Apibrėžkime $\xi_k := \pi/x_k$ ir $\gamma_k := x_k \sin x_k/2$. Tada $x_1 \approx 2.02876$, $x_2 \approx 4.91318$, $x_3 \approx 7.977$, $\xi_1 \approx 1.54853$, $\xi_2 \approx 0.639421$, $\xi_3 \approx 0.393743$, $\gamma_1 \approx 0.90985$, $\gamma_2 \approx -2.4072$, $\gamma_3 \approx 3.95836$, $z_1 \approx 2.3311$, $z_2 = 2\pi$, $z_3 \approx 9.2084$, $z_4 = 4\pi$.

1.4.3 lema. *Jei $\gamma_2 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_3$, tada visos uždavinio (2.4)–(2.6$_1$) tikrinės reikšmės yra realiosios visiems $\xi \in (0,1)$, ir ribinis atvejis realizuojamas, kai $\xi = \xi_2$ ir $\xi = \xi_3$. Jei $\gamma_2 < \gamma \leqslant 2$, tada visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir paprastos visiems $\xi \in (0,1)$.*

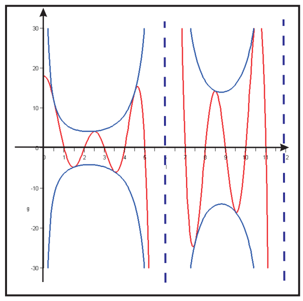
Įrodymas. Galime nagrinėti tik nepastoviąsias tikrines reikšmes, nes pastoviosios tikrinės reikšmės (jei jos egzistuoja) yra teigiamos. Teigiamų tikrinių reikšmių



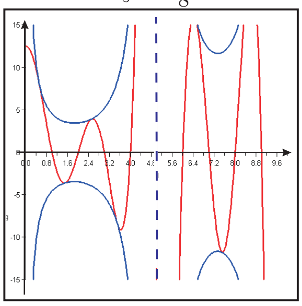
$\xi = \frac{1}{8}$



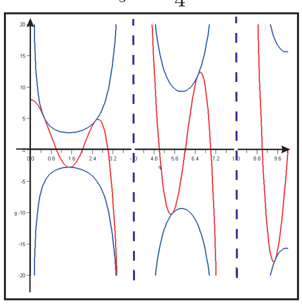
$\xi = \frac{1}{4}$



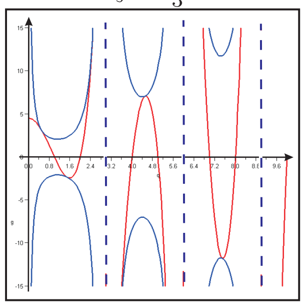
$\xi = \frac{1}{3}$



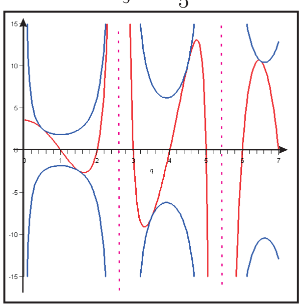
$\xi = \frac{2}{5}$



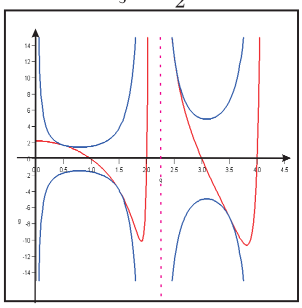
$\xi = \frac{1}{2}$



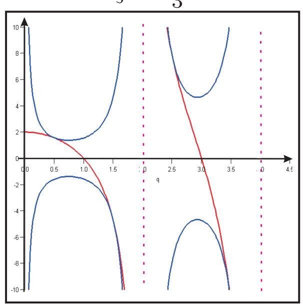
$\xi = \frac{2}{3}$



$\xi = \frac{3}{4}$



$\xi = \frac{95}{100}$



$\xi = 1$

1.5 pav. Funkcijos $\gamma_+(x\pi;\xi)$ ir $\pm g(x\pi;\xi)$

pasiskirstymą aprašo funkcija γ_{1+}. Išskaidome γ_{1+} į dauginamuosius:

$$\gamma_{1+}(x;\xi) = \frac{x\sin x}{1-\cos(\xi x)} = g(x;\xi)\sin x, \qquad \text{čia } g(x;\xi) := \frac{x}{1-\cos(\xi x)}.$$

Funkcijų $\gamma_{1+}(x;\xi)$ ir $\pm g(x;\xi)$ grafikai įvairioms parametro ξ reikšmėms pateikti 1.5 paveiksle. Kaip matome, funkcijos $\gamma_{1+}(x;\xi)$ grafikas osciliuoja tarp funkcijų $g(x;\xi)$ ir $-g(x;\xi)$.

Apibrėžkime funkciją $\bar{g}(x;\xi) := \frac{1}{1-\cos(\xi x)} \geqslant \frac{1}{2}$. Pirmi du šios funkcijos poliai yra $x = \frac{2\pi}{\xi}$ ir $x = \frac{4\pi}{\xi}$. Kai $x \geqslant \frac{4\pi}{\xi}$, tai $g(x;\xi) = x\bar{g}(x;\xi) \geqslant 2\pi > \gamma_3$. Taigi, šiuo atveju, funkcijos $\gamma_{1+}(x,\xi)$ reikšmės nepriklauso intervalui $[\gamma_2, \gamma_3]$.

Kadangi

$$g'(x) = \frac{1 - \cos(\xi x) - \xi x \sin(\xi x)}{(1 - \cos(\xi x))^2}, \tag{4.17}$$

funkcijos $g(x)$ minimumo taškai yra $x_{min} = \frac{z_k}{\xi}$, $k \in \mathbb{N}_o$, čia z_k yra teigiama lygties $1 - \cos z - z \sin z = 0$ šaknis. Taškai $x = \frac{z_k}{\xi}$, $k \in \mathbb{N}_e$ yra poliai.

Kai $x \in (\frac{2\pi}{\xi}, \frac{4\pi}{\xi})$, funkcija $g(x)$ turi vieną minimumo tašką, ir $g(\frac{z_3}{\xi}, \xi) = \frac{1}{\xi}\frac{z_3}{1-\cos z_3}$. Gauname, kad $g(x, \xi) \geqslant \frac{3z_3}{1-\cos z_3} > \gamma_3$.

Taigi, funkciją γ_{1+} reikia nagrinėti tik pirmame intervale $(0, \frac{2\pi}{\xi})$. Jei $\xi \leqslant \frac{1}{2}$, tai $g(x, \xi) \geqslant \frac{1}{\xi}\frac{z_1}{1-\cos z_1} \geqslant \frac{2z_1}{1-\cos z_1} > \gamma_2$.

Funkcijos $\gamma_{1+}(x, \xi)$ ekstremumo taškus galime rasti iš sistemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_{1+}}{\partial x} = \dfrac{(\sin x + x\cos x)(1 - \cos(\xi x)) + \xi x \sin x \sin(\xi x)}{(1 - \cos(\xi x))^2} = 0, \\ \dfrac{\partial \gamma_{1+}}{\partial \xi} = -\dfrac{\xi x \sin x \sin(\xi x)}{(1 - \cos(\xi x))^2} = 0. \end{cases}$$

Ši sistema ekvivalenti

$$\begin{cases} \sin x + x \cos x = 0, \\ \sin(\xi x) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Kai $\xi > \frac{1}{2}$, funkcija $\gamma_{1+}(x; \xi)$ turi vieną lokalų minimumą, kai $x \in (\pi, 2\pi)$. Tada $\xi x \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, t.y. egzistuoja tik vienas ekstremumo taškas (x_2, ξ_2), ir šis taškas yra balno taškas (1.4 paveikslas, a)) $\xi \in [0.5, 0.9], x \in (\pi, 2\pi)$) ir $\gamma_{1+}(x_2, \xi_2) = \gamma_2$.

Jei $\xi \leqslant \frac{1}{3}$, tada $g(x, \xi) \geqslant \frac{z_3}{1-\cos z_3} > \gamma_3$. Jei $\xi \geqslant \frac{2}{3}$, funkcija $\gamma_{1+}(x; \xi)$ intervale $(0, \frac{2\pi}{\xi})$ neturi lokalių maksimumo taškų. Jei $\frac{1}{2} \leqslant \xi < \frac{2}{3}$, tai egzistuoja tik vienas lokalaus maksimumo taškas x_{max} ir

$$\gamma_{1+}(x_{max}, \xi) \geqslant g(\tfrac{5\pi}{2}, \xi) \geqslant 5\pi/\big(2 - 2\cos(\tfrac{5\pi\xi}{2})\big) \geqslant 5\pi/\big(2 - 2\cos(\tfrac{5\pi}{2})\big) > \gamma_3.$$

Jei $\frac{1}{3} \leqslant \xi < \frac{1}{2}$, tada egzistuoja du lokalaus maksimumo taškai x_{max}, x'_{max},

$$\gamma_{1+}(x'_{max}, \xi) \geqslant g(\tfrac{9\pi}{2}, \xi) \geqslant 9\pi/\big(2 - 2\cos(\tfrac{9\pi\xi}{2})\big) \geqslant 9\pi/\big(2 - 2\cos(\tfrac{9\pi}{2})\big) > \gamma_3,$$

ir $x_{max} \in (2\pi, 3\pi)$. Tada $\xi x_{max} \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$, t.y. egzistuoja tik vienas ekstremumo taškas (x_3, ξ_3), ir šis taškas yra balno taškas (1.4 paveikslas, b) $\xi \in [0.3, 0.5], x \in (2\pi, 3\pi)$) ir $\gamma_{1+}(x_3, \xi_3) = \gamma_3$.

Taigi, kai $\gamma_2 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_3$ horizontali tiesė γ kerta funkcijos γ_{1+} grafiką. Jei $\gamma = 0$, tai gauname klasikinį atvejį, kai visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir paprastos. Kai $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$, visos tikrinės reikšmės išlieka realiosios ir paprastos. Jas galime sunumeruoti kaip klasikiniame atvejyje.

Kai $\gamma > \frac{2}{\xi^2}$, egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė. Taigi, visos tikrinės reikšmės bus teigiamos visiems $\xi \in (0, 1)$, jei $\gamma \leqslant 2$. ■

1.4.2 *pastaba.* Kai $\xi = \xi_2$ ir $\gamma = \gamma_2$ arba $\xi = \xi_3$ ir $\gamma = \gamma_3$, tai egzistuoja viena kartotinė tikrinė reikšmė.

1.4.3 *pastaba.* Kai $\xi = \xi_0 \approx 0.55$, tai $\gamma_M = \gamma_{1+}(x_{max}) = \gamma_{1+}(0) = \frac{2}{\xi^2} \approx 6.599$ ir visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir paprastos, kai $\gamma_m < \gamma < \gamma_M \approx -2.55$.

Tegul $\tilde{p}_k = \frac{2\pi k}{\xi}$, t.y. $\tilde{p}_k$ yra poliai arba pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, tada pirmuoju atveju antrosios eilės polių ženklai

$$\sigma_2(\gamma_{1+}, \tilde{p}_k) = \text{sign}\,\sin\frac{2\pi k}{\xi} = \text{sign}\,\sin\tilde{p}_k.$$

Pirmosios eilės poliams surandame jų ženklus. Pirmuoju atveju, kai $m \in \mathbb{N}_o$, $\tilde{p}_k = 2\pi k n$, tada

$$\sigma_1(\gamma_{1+}, \tilde{p}_k) = \text{sign}\,\frac{\cos(2\pi k n)}{\cos(2\pi k m)} = 1,$$

o kai $m \in \mathbb{N}_e$, $\tilde{p}_k = \pi k n$, tada

$$\sigma_1(\gamma_{1+}, \tilde{p}_k) = \text{sign}\,\frac{\cos(\pi k n)}{\cos(\pi k m)} = \text{sign}\,(-1)^{(n-m)k} = (-1)^k.$$

Antruoju atveju yra tik pirmosios eilės poliai $\tilde{p}_k = \frac{2\pi k}{1+\xi}$, $\tilde{\tilde{p}}_k = \frac{2\pi k}{1-\xi}$, ir jų ženklai

$$\sigma_1(\gamma_{2+}, \tilde{p}_k) = 1, \quad \sigma_1(\gamma_{2+}, \tilde{\tilde{p}}_k) = 1.$$

1.5. Pagrindiniai skyriuje gauti rezultatai

- Ištirta Šturmo ir Liuvilio uždavinio (2.4)-(2.6$_1$) (1 atv.) ir (2.4)-(2.5), (2.6$_2$) (2 atv.) realiosios spektro dalies priklausomybė nuo parametrų γ ir ξ.
- Šis uždavinys abiem nelokaliųjų kraštinių sąlygų atvejais turi vieną nulinę tikrinę reikšmę, kai parametras $\gamma = \gamma_0$, $\gamma_0 = \frac{2}{\xi^2}$ (1 atv.), $\gamma_0 = \frac{2}{1-\xi^2}$ (2 atv.); vieną neigiamą tikrinę reikšmę, kai parametras $\gamma > \gamma_0$.
- Teigiamos spektrų dalys yra skirtingos realiesiems γ. Šturmo ir Liuvilio uždavinyje 2 atv. egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės. O 1 atv. visos realiosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik, kai $\gamma_m(\xi) \leq \gamma \leq \gamma_M(\xi)$, tačiau šis intervalas $[\gamma_2, \gamma_3] \subset [\gamma_m, \gamma_M]$ yra tas pats visiems ξ. Taigi, šiuo atveju kai kuriems realiesiems γ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

2 skyrius

Šturmo ir Liuvilio uždavinys stacionariajam diferencialiniam operatoriui su viena nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga

2.1. Šturmo ir Liuvilio uždavinys su viena nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga

Diferencialinius uždavinius su nelokaliosiomis dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis nagrinėja A. V. Gulin, V. A. Morozova [45], V. A. Ilyin, E. I. Moiseev [52], N. I. Ionkin, V. A. Morozova [58], N. I. Ionkin, E. A. Valikova [59], A. V. Gulin, N. I. Ionkin, V. A. Morozova [44], R. Ma [77], M. Sapagovas [97] ir M. Sapagovas, A. Štikonas [98].

Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine,

$$u''(t) + \lambda u(t) = 0, \quad t \in (0, 1), \tag{1.1}$$

$$u(0) = 0, \tag{1.2}$$

o kita nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga

$$u'(1) = \gamma u'(\xi) \tag{1.3}$$

spektrą diskrečiuoju atveju tyrė A. V. Gulin, V. A. Morozova. Kai parametras $\xi = 1$ ir $\gamma = 1$ arba $|\gamma| > 1$ tikrinės reikšmės nagrinėjamos [45] straipsnyje, o kai $0 < \gamma < 1$ – [44] straipsnyje.

Uždavinio (1.1)–(1.2) su nelokaliąja Samarskio ir Bitsadzės tipo kraštine sąlyga

$$u(1) = \gamma u(\xi), \tag{1.4}$$

su tam tikromis $\xi \in (0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{C}$, spektrą tyrė M. Sapagovas ir A. Štikonas [98] tiek diferencialiniu, tiek diskrečiuoju atveju. Šiame straipsnyje nustatyta, kada (1.1)–(1.2), (1.4) uždavinys turi neigiamas, teigiamas ir nulinę tikrines reikšmes, su kokiomis nelokaliosios sąlygos parametrų reikšmėmis egzistuoja realiosios, kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamas Šturmo ir Liuvilio uždavinio su trijų tipų dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis spektras. Tiriama, kaip tikrinių reikšmių pasiskirstymas priklauso nuo nelokaliosios sąlygos parametrų. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai paskelbti straipsniuose [2A, 5A].

2.2. Uždavinio formulavimas

Šiame skirsnyje toliau nagrinėjamas Šturmo – Liuvilio uždavinys su viena klasikine kraštine sąlyga kairiajame intervalo $(0,1)$ krašte

$$-u'' = \lambda u, \qquad t \in (0,1), \tag{2.5}$$
$$u(0) = 0, \tag{2.6}$$

ir kita nelokaliąja dvitaške Samarskio ir Bitsadzės tipo kraštine sąlyga

$$u'(1) = \gamma u(\xi), \qquad \text{(1 atv.)} \qquad (2.7_1)$$
$$u'(1) = \gamma u'(\xi), \qquad \text{(2 atv.)} \qquad (2.7_2)$$
$$u(1) = \gamma u'(\xi), \qquad \text{(3 atv.)} \qquad (2.7_3)$$
$$u(1) = \gamma u(\xi), \qquad \text{(4 atv.)} \qquad (2.7_4)$$

su parametrais $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ ir $\xi \in [0,1]$. Ketvirtas atvejis (2.7_4) buvo analizuojamas straipsnyje [98]. Taigi, nagrinėsime tik pirmus tris atvejus (2.7_1), (2.7_2), (2.7_3).

2.2.1 *pastaba.* Kai $\gamma = \infty$, galima nagrinėti kraštines sąlygas su $\xi > 0$:

$$u(\xi) = 0, \text{ (1 ir 4 atv.)}, \; u'(\xi) = 0, \text{ (2 ir 3 atv.)}$$

vietoje (2.7) kraštinių sąlygų.

Atveju, kai $\gamma = 0$, vietoje (2.5)-(2.7) uždavinio, gauname uždavinį su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Tada tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos yra:

$$\lambda_k = \pi^2\big(k - \tfrac{1}{2}\big)^2, \qquad u_k(t) = \sin\big(\pi(k - \tfrac{1}{2})t\big), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad (2.8_{1,2})$$
$$\lambda_k = (\pi k)^2, \qquad u_k(t) = \sin(\pi k t), \qquad k \in \mathbb{N}. \qquad (2.8_3)$$

2.2.2 *pastaba.* Klasikines tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas (2.8) gauname, jei $\xi = 0$ (1, 4 atv.). Kai $\xi = 1$ (2, 4 atv.), klasikines tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas (2.8) gauname tik, kai $\gamma \neq 1$, ir antroji kraštinė sąlyga yra triviali, kai $\gamma = 1$. Kai $\xi = 1$ (1, 3 atv.) gauname trečiojo tipo (klasikines) kraštines sąlygas.

2.3. Pagrindinės spektro savybės ir jo priklausomybė nuo uždavinio parametrų

Kai $\lambda = 0$, tai visos funkcijos $u(t) = ct$ tenkina (2.5)-(2.6) uždavinį. Įstačius šį sprendinį į antrąja kraštinę sąlygą (2.7), gauname lygybes: $c = c\gamma\xi$ $(1, 4$ atv.$)$, $c = c\gamma$ $(2, 3$ atv.$)$

2.3.1 lema. *Tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada, ir tik tada, kai: 1 atv. (ir 4 atv.) $\gamma = \frac{1}{\xi}$; 2 ir 3 atv. $\gamma = 1$.*

Bendruoju atveju, kai $\lambda \neq 0$, tikrinės funkcijos yra $u = c\sin(qt)$ ir tikrinės reikšmės $\lambda = q^2$, čia $q \in \mathbb{C}_q \setminus \{0\}$.

Šios tikrinės funkcijos tenkina (2.5) lygtį, (2.6) kraštinę sąlygą ir (2.7) nelokaliąją kraštinę sąlygą.

Kai $\lambda \neq 0$ nelokalioji kraštinė sąlyga yra tenkinama, jei

$$cq\cos q = c\gamma\sin(\xi q), \tag{3.9$_1$}$$
$$cq\cos q = c\gamma q\cos(\xi q), \tag{3.9$_2$}$$
$$c\sin q = c\gamma q\cos(\xi q) \tag{3.9$_3$}$$

ir netrivialus sprendinys egzistuoja, kai q yra lygties

$$f_1(z) := \gamma\frac{\sin(\xi z)}{z} - \cos z = 0, \tag{3.10$_1$}$$
$$f_2(z) := \gamma\cos(\xi z) - \cos z = 0, \tag{3.10$_2$}$$
$$f_3(z) := \gamma\cos(\xi z) - \frac{\sin z}{z} = 0 \tag{3.10$_3$}$$

šaknis. Jei $\sin(\xi q) = 0$ ir $\cos q = 0$ (1 atv.), $\cos(\xi q) = 0$ ir $\cos q = 0$ (2 atv.) arba $\cos(\xi q) = 0$ ir $\sin q = 0$ (3 atv.), tai (3.10) lygtis yra teisinga visiems $\gamma \in \mathbb{C}$. Šiuo atveju gauname *pastoviąsias tikrines reikšmes* $\lambda = q^2$, o q yra sistemos:

$$\{\cos q = 0, \quad \sin(\xi q) = 0; \tag{3.11$_1$}$$
$$\{\cos q = 0, \quad \cos(\xi q) = 0; \tag{3.11$_2$}$$
$$\{\sin q = 0, \quad \cos(\xi q) = 0 \tag{3.11$_3$}$$

šaknys.

2.3.1 teiginys. *Jei parametras ξ yra iracionalusis skaičius, tai pastoviosios tikrinės reikšmės neegzistuoja.*

Įrodymas. Pirmosios lygties šaknys yra $q_k = \pi(k - \frac{1}{2})$ (1, 2 atv.) arba $q_k = \pi k$ (3 atv.), $k \in \mathbb{N}$, antrosios lygties šaknys yra $q_l = \pi(l - \frac{1}{2})/\xi$ (2 atv.) arba $q_l = \pi l/\xi$ (1, 3 atv.), $l \in \mathbb{N}$. Skaičiai $q_k/\pi \in \mathbb{Q}$, bet $q_l/\pi \notin \mathbb{Q}$. Taigi, (3.11) sistema neturi sprendinių. ■

2.3.1 *pastaba.* 4 atvejyje [98] pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionaliesiems $\xi = r = \frac{m}{n} \in [0, 1)$, ir jos lygios $\lambda_k = (\pi nk)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

2.3.2 teiginys. *Tegul n ir m ($0 < m < n$) yra tarpusavyje pirminiai skaičiai ir $q \in \mathbb{C}_q \setminus \{0\}$. Tada*

$$\begin{cases} \cos(nz) = 0, \\ \sin(mz) = 0 \end{cases} \sim \begin{array}{l} \cos z = 0, \ \textit{kai}\ m \in \mathbb{N}_e, n \in \mathbb{N}_o, \\ \varnothing \ \textit{kitais atvejais}\ ; \end{array} \tag{3.12$_1$}$$

$$\begin{cases} \cos(nz) = 0, \\ \cos(mz) = 0 \end{cases} \sim \begin{array}{l} \cos z = 0, \ \textit{kai}\ m \in \mathbb{N}_o, n \in \mathbb{N}_o, \\ \varnothing \ \textit{kitais atvejais}\ ; \end{array} \tag{3.12$_2$}$$

$$\begin{cases} \sin(nz) = 0, \\ \cos(mz) = 0 \end{cases} \sim \begin{array}{l} \cos z = 0, \ \textit{kai}\ m \in \mathbb{N}_o, n \in \mathbb{N}_e, \\ \varnothing \ \textit{kitais atvejais}\ ; \end{array} \tag{3.12$_3$}$$

$$\begin{cases} \sin(nz) = 0, \\ \sin(mz) = 0 \end{cases} \sim \sin z = 0. \tag{3.12$_4$}$$

Įrodymas. 1 atvejis. Teigiamos lygčių $\cos(nz) = 0$ ir $\sin(mz) = 0$ šaknys yra atitinkamai $\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, ir $\frac{\pi}{2}\frac{2l}{m}$, $l \in \mathbb{N}$. Bendra šaknis egzistuoja, jei $(2k-1)m = 2ln$. Taigi, tokios šaknys egzistuoja, jei m lyginis. Kadangi n ir m yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, tai n turi būti nelyginis ir $2k - 1 = n \cdot (2\tilde{k} - 1)$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $2l = m \cdot \tilde{l}$, $\tilde{l} \in \mathbb{N}$. Jei $\tilde{l} = 2\tilde{k} - 1$, tai gauname bendrą šaknį, t.y. $z_k = \pi(\tilde{k} - \frac{1}{2})$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$. Šios šaknys (ir tik jos) yra lygties $\cos z = 0$ šaknys.

2 atvejis. Teigiamos lygčių $\cos(nz) = 0$ ir $\cos(mz) = 0$ šaknys yra atitinkamai $\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, ir $\frac{\pi}{2}\frac{2l-1}{m}$, $l \in \mathbb{N}$. Bendrą šaknį turime, kai $(2k - 1)m = (2l - 1)n$. Taigi, šios šaknys egzistuoja, jei m ir n abu kartu yra nelyginiai skaičiai. Tada $2k-1 = n\cdot(2\tilde{k}-1)$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $2l-1 = m\cdot(2\tilde{l}-1)$, $\tilde{l} \in \mathbb{N}$. Jei $\tilde{l} = \tilde{k}$, tai gauname bendrą šaknį $z_k = \pi(\tilde{k} - \frac{1}{2})$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, t.y. lygties $\cos z = 0$ šaknį.

3 atvejis. Teigiamos lygčių $\sin(nz) = 0$ ir $\cos(mz) = 0$ šaknys yra atitinkamai $\frac{\pi}{2}\frac{2k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, ir $\frac{\pi}{2}\frac{2l-1}{m}$, $l \in \mathbb{N}$. Bendrą šaknį turime, kai $2km = (2l - 1)n$. Taigi, šios šaknys egzistuoja, jei n lyginis. Tada m turi būti nelyginis ir $2k = n \cdot \tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $2l - 1 = m \cdot (2\tilde{l} - 1)$, $\tilde{l} \in \mathbb{N}$. Jei $\tilde{k} = 2\tilde{l} - 1$, tai gauname bendrą šaknį $z_k = \pi(\tilde{k} - \frac{1}{2})$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, t.y. lygties $\cos z = 0$ šaknį.

4 atvejis. Teigiamos lygčių $\sin(nz) = 0$ ir $\sin(mz) = 0$ šaknys yra atitinkamai $\pi k/n$, $k \in \mathbb{N}$, ir $\pi l/m$, $l \in \mathbb{N}$. Bendrą šaknį turime, kai $km = ln$. Taigi, šios šaknys egzistuoja, jei $k = n \cdot \tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $l = m \cdot \tilde{l}$, $\tilde{l} \in \mathbb{N}$. Jei $\tilde{l} = \tilde{k}$, tai gauname bendrą šaknį $z_k = \pi\tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, t.y. lygties $\sin z = 0$ šaknį. ■

2.3.2 lema. *Pastoviosios tikrinės reikšmės neegzistuoja iracionaliesiems ξ, o racionaliesiems $\xi = r = \frac{m}{n} \in [0, 1]$ egzistuoja šiais atvejais:*

1 atveju $m \in \mathbb{N}_e$, $n \in \mathbb{N}_o$;

2 atveju $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_o$, $m \leqslant n$;

3 atveju $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_e$;

ir pastoviosios tikrinės reikšmės lygios $\lambda_k = c_k^2$, $c_k = \pi(k - \frac{1}{2})n$, $k \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Jei ξ yra iracionalusis skaičius, tai šios lemos įrodymas seka iš 2.3.1 teiginio. Jei 2.3.2 teiginyje $z = q/n$, $q \in \mathbb{C}_q$, visus 2.3.2 lemos teiginius įrodysime tuo atveju, kai $\xi = r \in (0, 1)$.

Jei $\xi = 0$, tai iš (3.10) lygties seka, kad pirmuoju atveju gauname tik pastoviąsias tikrines reikšmes (klasikinis atvejis), o antruoju ir trečiuoju atvejais nėra pastoviųjų tikrinių reikšmių. Jei $\xi = 1$ pirmuoju ir trečiuoju atvejais pastoviųjų tikrinių reikšmių nėra (trečiojo tipo kraštinė sąlyga), nes funkcijos $\sin q$ ir $\cos q$ neturi bendrų nulių, o antruoju atveju egzistuoja tik pastoviosios tikrinės reikšmės (klasikinis atvejis $\gamma \neq 1$). ■

Apibrėžkime funkcijas $S_j(z) := \frac{\sin(jz)}{\cos z}$, $j \in \mathbb{N}_e$, $C_j(z) := \frac{\cos(jz)}{\cos z}$, $j \in \mathbb{N}_o$. Pasinaudodami Muavro formule jas galime užrašyti tokiu būdu:

$$S_{2k}(z) = 2k\cos^{2k-2} z \sin z - \binom{2k}{3} \cos^{2k-4} z \sin^3 z + \cdots + (-1)^{k-1} 2k \sin^{2k-1} z,$$
$$C_{2k+1}(z) = \cos^{2k} z - \binom{2k+1}{2} \cos^{2k-2} z \sin^2 z + \cdots + (-1)^k \sin^{2k} z, k \in \mathbb{N}_0.$$

Matome, kad $S_0(z) \equiv 0$, $C_1(z) \equiv 1$, ir kai $k \geqslant 1$, funkcijos $S_{2k}(z)$ ir $C_{2k+1}(z)$ yra sveikosios transcendenčiosios funkcijos, kurių didėjimo eilė yra pirmoji. Funkcijos $\cos z$, $S_j(z)$, $j > 1$, ir $C_j(z)$ neturi bendrų nulių (2.3.2 teiginys).

2.3.2 *pastaba.* Funkcijos $S_{2k}(z) = \sin z P_{2k}(\cos z)$, $C_{2k+1}(z) = P_{2k+1}(\cos z)$, čia P_j, $j \in \mathbb{N}_0$ yra daugianariai (su realiaisiais sveikaisiais koeficientais):

$$P_{2k}(z) = 2kz^{2k-2} - \binom{2k}{3} z^{2k-4}(1 - z^2) + \cdots + (-1)^{k-1} 2k(1 - z^2)^{k-1},$$
$$P_{2k+1}(z) = z^{2k} - \binom{2k+1}{2} z^{2k-2}(1 - z^2) + \cdots + (-1)^k (1 - z^2)^k,$$

ir $P_0 \equiv 0$, $P_1 \equiv 1$, $P_2 \equiv 1$, ir P_k yra nepastovus, kai $k > 2$.

Iš 2.3.2 lemos gauname (Įvade Ξ, R, C apibrėžimai):

$$R = \{\xi = \frac{m}{n} | m \in \mathbb{N}_e, n \in \mathbb{N}_o, 0 < m < n\}; \qquad \text{(1 atv.)}$$
$$R = \{\xi = \frac{m}{n} | m \in \mathbb{N}_o, n \in \mathbb{N}_o, m < n\}; \qquad \text{(2 atv.)}$$
$$R = \{\xi = \frac{m}{n} | m \in \mathbb{N}_o, n \in \mathbb{N}_e, m < n\}; \qquad \text{(3 atv.)}$$

ir

$$\Xi = \big((0,1) \setminus R\big) \cup \{1\}; \qquad C = \{0\}; \qquad \text{(1 atv.)}$$
$$\Xi = \big((0,1) \setminus R\big) \cup \{0\}; \qquad C = \{1\}; \qquad \text{(2 atv.)}$$
$$\Xi = \big((0,1) \setminus R\big) \cup \{0,1\}; \qquad C = \varnothing. \qquad \text{(3 atv.)}$$

2.3.3 *pastaba.* 2 atveju ir $\xi = 1$, kai $\gamma \neq 1$ gauname pastoviąsias tikrines reikšmes, tačiau kai $\gamma = 1$ neturime antrosios kraštinės sąlygos (ji triviali). Šiuo specialiu atveju apibrėžiame $\xi = 1 \in C$. Tada $R \cup \Xi \cup C = [0,1]$ visuose atvejuose.

Kai $\xi \in R$ iš (3.10) lygties gauname:

$$\cos\frac{q}{n} \cdot \left[\frac{\gamma}{q} S_m\Big(\frac{q}{n}\Big) - C_n\Big(\frac{q}{n}\Big)\right] = 0, \tag{3.13$_1$}$$
$$\cos\frac{q}{n} \cdot \left[\gamma C_m\Big(\frac{q}{n}\Big) - C_n\Big(\frac{q}{n}\Big)\right] = 0, \tag{3.13$_2$}$$
$$\cos\frac{q}{n} \cdot \left[\gamma C_m\Big(\frac{q}{n}\Big) - \frac{1}{q} S_n\Big(\frac{q}{n}\Big)\right] = 0. \tag{3.13$_3$}$$

Toliau nagrinėkime nepastoviąsias tikrines reikšmes. Kai $\xi \in R$, apibrėžkime funkcijas:

$$f_{1r}(z) := \gamma \frac{\sin\frac{z}{n}}{z} P_m\Big(\cos\frac{z}{n}\Big) - P_n\Big(\cos\frac{z}{n}\Big), \tag{3.14$_1$}$$
$$f_{2r}(z) := \gamma P_m\Big(\cos\frac{z}{n}\Big) - P_n\Big(\cos\frac{z}{n}\Big), \tag{3.14$_2$}$$
$$f_{3r}(z) := \gamma P_m\Big(\cos\frac{z}{n}\Big) - \frac{\sin\frac{z}{n}}{z} P_n\Big(\cos\frac{z}{n}\Big). \tag{3.14$_3$}$$

2.3.4 *pastaba.* Kai $\gamma = \infty$, apibrėžkime:

$$f_1(z) := \frac{\sin(\xi z)}{z}; \quad f_2(z) := \cos(\xi z); \quad f_3(z) := \cos(\xi z);$$
$$f_{1r}(z) := \frac{\sin\frac{z}{n}}{z} P_m\Big(\cos\frac{z}{n}\Big); \quad f_{2r}(z) := P_m\Big(\cos\frac{z}{n}\Big); \quad f_{3r}(z) := P_m\Big(\cos\frac{z}{n}\Big).$$

Pastebėsime, kad $f_{2r} \equiv 1$ ir $f_{3r} \equiv 1$, kai $\xi = \frac{1}{2}$.

2.3.3 lema. *Kiekvienam $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ ir kiekvienam $\xi \in \Xi \cup R$ egzistuoja skaitusis skaičius nepastoviųjų tikrinių reikšmių. Taškas $\lambda = \infty$ yra šių tikrinių reikšmių sankaupos taškas.*

Įrodymas. Funkcijos $f_k(\sqrt{\lambda})$, $k = 1, 2, 3$, kai $\xi \in \Xi$ ir funkcijos $f_{kr}(\sqrt{\lambda})$, $k = 1, 2, 3$, kai $\xi \in R$ yra sveikosios transcendenčiosios funkcijos, kurių didėjimo eilė lygi $\frac{1}{2}$. Šios funkcijos kiekvieną savo γ-reikšmę įgyja begalinį (skaitųjį) skaičių kartų, o $\lambda = \infty$ yra γ-reikšmių sankaupos taškas [80]. ■

Visas nepastoviąsias tikrines reikšmes (kurios priklauso nuo parametro γ) galime gauti kaip meromorfinių funkcijų, apibrėžtų aibėje $\mathbb{C}_q$, γ-reikšmes:

$$\gamma_1(z) := \frac{z\cos z}{\sin(\xi z)}, \tag{3.15$_1$}$$

$$\gamma_2(z) := \frac{\cos z}{\cos(\xi z)}, \tag{3.15$_2$}$$

$$\gamma_3(z) := \frac{\sin z}{z\cos(\xi z)}, \tag{3.15$_3$}$$

kai $\xi \in \Xi$, ir

$$\gamma_{1r}(z) := n\frac{\frac{z}{n}}{\sin\frac{z}{n}}\frac{P_n\big(\cos\frac{z}{n}\big)}{P_m\big(\cos\frac{z}{n}\big)}, \tag{3.16$_1$}$$

$$\gamma_{2r}(z) := \frac{P_n\big(\cos\frac{z}{n}\big)}{P_m\big(\cos\frac{z}{n}\big)}, \tag{3.16$_2$}$$

$$\gamma_{3r}(z) := \frac{1}{n}\frac{\sin\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}\frac{P_n\big(\cos\frac{z}{n}\big)}{P_m\big(\cos\frac{z}{n}\big)}, \tag{3.16$_3$}$$

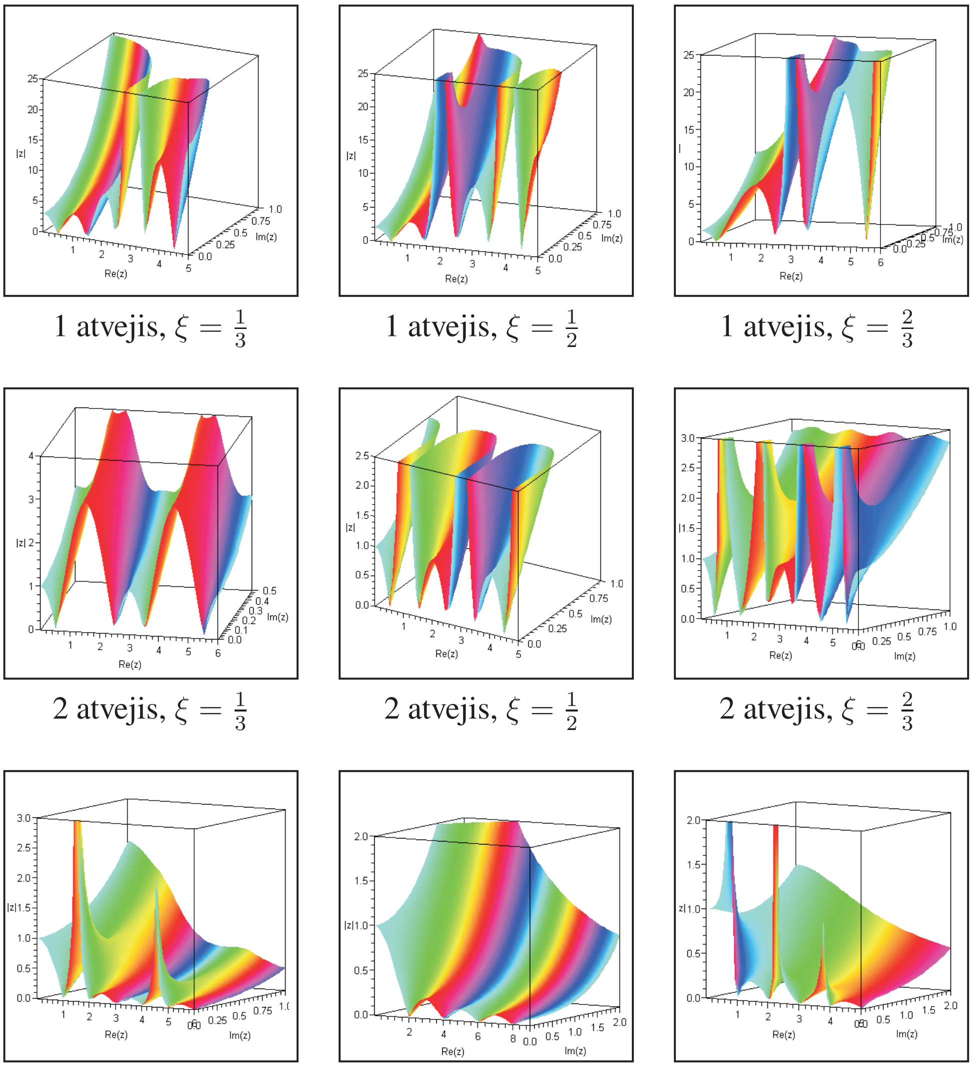
kai $\xi = \frac{m}{n} \in R$.

2.3.5 *pastaba.* Funkcijų $\gamma_k(q)$, $\gamma_{kr}(q)$, $k = 1, 2, 3$ poliai yra (2.5)–(2.7) uždavinio tikrinės reikšmės, kai $\gamma = \infty$.

Funkcijos $|\gamma_{kr}(z\pi)|$, $k = 1, 2, 3$ grafikai įvairioms parametro ξ reikšmėms pateikti 2.1 paveiksle.

2.3.3 teiginys. *Visi meromorfinių funkcijų γ_k, γ_{kr} nuliai ir poliai priklauso teigiamai realiosios ašies daliai.*

Įrodymas. Įrodymas seka iš (3.15) ir (3.16) formulių, sinuso ir kosinuso funkcijų savybių (visi šių funkcijų nuliai yra realieji skaičiai). Taigi, $\mathbb{C}_q$ yra tik teigiami nuliai ir poliai. ■



1 atvejis, $\xi = \frac{1}{3}$ 1 atvejis, $\xi = \frac{1}{2}$ 1 atvejis, $\xi = \frac{2}{3}$

2 atvejis, $\xi = \frac{1}{3}$ 2 atvejis, $\xi = \frac{1}{2}$ 2 atvejis, $\xi = \frac{2}{3}$

3 atvejis, $\xi = \frac{1}{3}$ 3 atvejis, $\xi = \frac{1}{2}$ 3 atvejis, $\xi = \frac{2}{3}$

2.1 pav. Funkcijos $|\gamma_{kr}(z\pi)|$ įvairiems ξ

2.3.6 *pastaba.* Jei $\xi \in \Xi$, tai $z_j = \pi(k - \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{N}$ yra funkcijų $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ nuliai (pirmosios eilės), o $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$ funkcijos $\gamma_3(z)$ nuliai (pirmosios eilės) ((3.15) formulė). Taškai $p_k = \pi k/\xi$, $k \in \mathbb{N}$ yra funkcijos $\gamma_1(z)$ poliai (pirmosios eilės), o taškai $p_k = \pi(k - \frac{1}{2})/\xi$, $k \in \mathbb{N}$ yra funkcijų $\gamma_2(z)$, $\gamma_3(z)$ poliai (pirmosios eilės).

2.3.7 *pastaba.* Jei $\xi \in R$, pastoviųjų tikrinių reikšmių taškuose $c_k = \pi(k - \frac{1}{2})n$, $k \in \mathbb{N}$ (2.3.2 lema ir 2.3.6 pastaba) nuliai sutampa su poliais. Taigi, funkcija γ_{kr}

šiuose taškuose yra analizinė:

$$\lim_{q\to c_k}\gamma_1=\gamma_{1r}(c_k;\xi)=(-1)^{(n-m-1)/2}(-1)^k(k-\tfrac{1}{2})\frac{n^2}{m}\pi$$
$$=(-1)^{(n-m-1)/2}(-1)^k\frac{c_k}{\xi},\qquad (3.17_1)$$
$$\lim_{q\to c_k}\gamma_2=\gamma_{2r}(c_k;\xi)=(-1)^{(n-m)/2}\frac{n}{m}=(-1)^{(n-m)/2}\frac{1}{\xi},\qquad (3.17_2)$$
$$\lim_{q\to c_k}\gamma_3=\gamma_{3r}(c_k;\xi)=(-1)^{(n-m-1)/2}(-1)^{k+1}\frac{1}{m(k-\frac{1}{2})\pi}$$
$$=(-1)^{(n-m-1)/2}(-1)^{k+1}\frac{1}{c_k\xi}\qquad (3.17_3)$$

ir $\gamma_l(c_k)\neq 0$, $l=1,2,3$.

Tegul $c\in(a,b)$, o f ir g yra realiosios funkcijos $C^2(a,b)$, ir jų savybės $f''=\alpha f$, $g''=\beta g$, $f(c)=g(c)=0$, $g\neq 0$, kai $q\neq c$, $g'(c)\neq 0$ ir $\tilde\gamma(q)=\frac{f(q)}{g(q)}$, $\lim_{q\to c}\tilde\gamma(q)=\lim_{q\to c}\frac{f(g)}{g(q)}=\tilde\gamma_c$. Tada

$$\lim_{q\to c}\frac{\tilde\gamma' g'}{g}=g'(c)\lim_{q\to c}\frac{f'g-fg'}{g^3}=g'(c)\lim_{q\to c}\frac{f''g-fg''}{3g^2g'}$$
$$=\lim_{q\to c}\frac{\alpha fg-\beta fg}{3g^2}=\frac{\alpha-\beta}{3}\lim_{q\to c}\frac{f}{g}=\frac{\alpha-\beta}{3}\tilde\gamma_c;$$
$$\lim_{q\to c}\tilde\gamma''=\lim_{q\to c}\left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)'=\lim_{q\to c}\frac{f''g-fg''}{g^2}-\lim_{q\to c}(f'g-fg')\frac{2g'}{g^3}$$
$$=\lim_{q\to c}\frac{(\alpha-\beta)fg}{g^2}-2\lim_{q\to c}\tilde\gamma'\frac{g'}{g}=(\alpha-\beta)\tilde\gamma_c-\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\tilde\gamma_c=\frac{\alpha-\beta}{3}\tilde\gamma_c.$$

Jei $|\tilde\gamma_c|<\infty$, tai $\lim_{q\to c}\tilde\gamma'=\lim_{q\to c}\dfrac{\tilde\gamma' g'}{g}\lim_{q\to c}\dfrac{g}{g'}=\dfrac{\alpha-\beta}{3}\tilde\gamma_c\cdot\dfrac{0}{g'(c)}=0$. Taigi, gauname

$$\lim_{q\to c_k}\left(\frac{\cos q}{\sin(\xi q)}\right)'=0,\qquad \lim_{q\to c_k}\left(\frac{\cos q}{\sin(\xi q)}\right)''=-\frac{1-\xi^2}{3}\frac{\cos c_k}{\sin(\xi c_k)},\qquad (3.18_1)$$
$$\lim_{q\to c_k}\left(\frac{\cos q}{\cos(\xi q)}\right)'=0,\qquad \lim_{q\to c_k}\left(\frac{\cos q}{\cos(\xi q)}\right)''=-\frac{1-\xi^2}{3}\frac{\cos c_k}{\cos(\xi c_k)},\qquad (3.18_2)$$
$$\lim_{q\to c_k}\left(\frac{\sin q}{\cos(\xi q)}\right)'=0,\qquad \lim_{q\to c_k}\left(\frac{\sin q}{\cos(\xi q)}\right)''=-\frac{1-\xi^2}{3}\frac{\sin c_k}{\cos(\xi c_k)},\qquad (3.18_3)$$

ir

$$\gamma_1'(c_k;\xi) = \lim_{q\to c_k}\Big(\frac{q\cos q}{\sin(\xi q)}\Big)' = \frac{\gamma_{1+}(c_k;\xi)}{c_k}, \tag{3.19$_1$}$$

$$\gamma_2'(c_k;\xi) = \lim_{q\to c_k}\Big(\frac{\cos q}{\cos(\xi q)}\Big)' = 0, \tag{3.19$_2$}$$

$$\gamma_3'(c_k;\xi) = \lim_{q\to c_k}\Big(\frac{\sin q}{q\cos(\xi q)}\Big)' = -\frac{\gamma_{3+}(c_k;\xi)}{c_k}, \tag{3.19$_3$}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1''(c_k;\xi) &= \lim_{q\to c_k}\Big(\frac{q\cos q}{\sin(\xi q)}\Big)'' = 2\lim_{q\to c_k}\Big(\frac{\cos q}{\sin(\xi q)}\Big)' + \lim_{q\to c_k} q\Big(\frac{\cos(q)}{\sin(\xi q)}\Big)'' \\ &= 0 - c_k\frac{1-\xi^2}{3}\frac{\sin c_k}{\cos(\xi c_k)} = -\frac{1-\xi^2}{3}\gamma_1(c_k;\xi),\end{aligned} \tag{3.20$_1$}$$

$$\gamma_2''(c_k;\xi) = \lim_{q\to c_k}\Big(\frac{\cos q}{\cos(\xi q)}\Big)'' = -\frac{1-\xi^2}{3}\gamma_2(c_k;\xi), \tag{3.20$_2$}$$

$$\gamma_3''(c_k;\xi) = \lim_{q\to c_k}\Big(\frac{\sin q}{q\cos(\xi q)}\Big)'' = -\frac{1-\xi^2}{3}\gamma_3(c_k;\xi). \tag{3.20$_3$}$$

2.3.8 *pastaba.* Visus polius p_k, $k \in \mathbb{N}$, galima išrašyti didėjančia tvarka $p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \ldots$. Formaliai apibrėžkime $p_0 = 0$, $p_\infty = +\infty$. Kai $\xi \in R$, $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ sekoje gali būti tik vienas narys p_0.

2.3.9 *pastaba.* Kai $\xi \in \mathbb{Q}$, funkcijos γ_l ir γ_{lr} yra periodinės arba kvaziperiodinės realiojoje ašyje, t.y., jei

$$\tilde\gamma_1(z) := \frac{\gamma_1(z)}{z}, \qquad \tilde\gamma_{1r}(z) := \frac{\gamma_{1r}(z)}{z}, \tag{3.21$_1$}$$

$$\tilde\gamma_2(z) := \gamma_2(z), \qquad \tilde\gamma_{2r}(z) := \gamma_{2r}(z), \tag{3.21$_2$}$$

$$\tilde\gamma_3(z) := \gamma_3(z)z, \qquad \tilde\gamma_{3r}(z) := \gamma_{3r}(z)z, \tag{3.21$_3$}$$

tai

$$\tilde\gamma_1(z+2\pi n) = \tilde\gamma_1(z), \qquad \tilde\gamma_{1r}(z+2\pi n) = \tilde\gamma_{1r}(z), \tag{3.22$_1$}$$

$$\tilde\gamma_2(z+2\pi n) = \tilde\gamma_2(z), \qquad \tilde\gamma_{2r}(z+2\pi n) = \tilde\gamma_{2r}(z), \tag{3.22$_2$}$$

$$\tilde\gamma_3(z+2\pi n) = \tilde\gamma_3(z), \qquad \tilde\gamma_{3r}(z+2\pi n) = \tilde\gamma_{3r}(z). \tag{3.22$_3$}$$

Iš nelygybių $\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,q| \leqslant |\sin q|, |\cos q| \leqslant \mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,q)$ gauname įverčius

$$\frac{|z|\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,z|}{\mathrm{ch}\,(\xi \mathrm{Im}\,z)} \leqslant |\gamma_1(z)|, \quad |\gamma_{1r}(z)| \leqslant \frac{|z|\mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,z)}{\mathrm{sh}\,|\xi \mathrm{Im}\,z|}, \tag{3.23$_1$}$$

$$\frac{\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,z|}{\mathrm{ch}\,(\xi \mathrm{Im}\,z)} \leqslant |\gamma_2(z)|, \quad |\gamma_{2r}(z)| \leqslant \frac{\mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,z)}{\mathrm{sh}\,|\xi \mathrm{Im}\,z|}, \tag{3.23$_2$}$$

$$\frac{\mathrm{sh}\,|\mathrm{Im}\,z|}{|z|\mathrm{ch}\,(\xi \mathrm{Im}\,z)} \leqslant |\gamma_3(z)|, \quad |\gamma_{3r}(z)| \leqslant \frac{\mathrm{ch}\,(\mathrm{Im}\,z)}{|z|\mathrm{sh}\,|\xi \mathrm{Im}\,z|}. \tag{3.23$_3$}$$

2.3.1 *išvada.* Yra teisingos šios ribos: $\lim\limits_{\mathrm{Im}\,q\to\pm\infty} \gamma_k = \infty$, $\lim\limits_{\mathrm{Im}\,q\to\pm\infty} \gamma_{kr} = \infty$, $k = 1, 2, 3$, išskyrus $\xi = 1$ (2,3 atv.).

2.4. Uždavinio su viena nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga realiosios tikrinės reikšmės

Vietoje charakteristinių (3.15) funkcijų nagrinėjamos realiosios charakteristinės funkcijos:

$$\gamma_1(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{1-}(x;\xi) &= \dfrac{x\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,(\xi x)}, \quad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{1+}(x;\xi) &= \dfrac{x\cos x}{\sin(\xi x)}, \quad \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{4.24$_1$}$$

$$\gamma_2(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{2-}(x;\xi) &= \dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,(\xi x)}, \quad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{2+}(x;\xi) &= \dfrac{\cos x}{\cos(\xi x)}, \quad \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{4.24$_2$}$$

$$\gamma_3(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{3-}(x;\xi) &= \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x\mathrm{ch}\,(\xi x)}, \quad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{3+}(x;\xi) &= \dfrac{\sin x}{x\cos(\xi x)}, \quad \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases}. \tag{4.24$_3$}$$

Funkcijų $\gamma_l(x;\xi)$, $l = 1, 2, 3$ grafikai įvairiems ξ pateikti 2.2 paveiksle. Išrašykime visus polius p_k, $k \in \mathbb{N}$ didėjančia tvarka (2.3.8 pastaba). Funkcijos $\gamma_{1+}(x)$, $\gamma_{2+}(x)$ ir $\gamma_{3+}(x)$ yra apibrėžtos intervaluose $(\alpha, \beta) = (p_{k-1}, p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, čia $p_{k-1} < p_k$ ir $p_0 = 0$. Visos funkcijos $\gamma_{l-}(x) > 0$.

Nagrinėkime lygtis:

$$\cos z - \gamma \sin(\xi z) = 0, \tag{4.25$_1$}$$

$$\cos z - \gamma \cos(\xi z) = 0, \tag{4.25$_2$}$$

$$\sin z - \gamma \cos(\xi z) = 0, \tag{4.25$_3$}$$

$$\sin z - \gamma \sin(\xi z) = 0. \tag{4.25$_4$}$$

Galime įrodyti [98] sekančią lemą, kuri yra labai naudinga nagrinėjant realiąsias tikrines reikšmes.

2.4.1 lema. *Realiesiems* $\gamma \in [-1, 1]$ *ir* $\xi \in (0, 1)$ *visos lygčių* (4.25) *šaknys yra realieji skaičiai.*

2.4.1. Realiosios tikrinės reikšmės 1 atveju

2.4.1 teiginys. *Funkcija* $\gamma_{1-}(x; \xi)$ *yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai* $x < 0$ *visiems* $\xi \in (0, 1]$. *Funkcija* $\gamma_{1+}(x; 1)$ *yra monotoniškai mažėjanti funkcija kiekviename intervale* (p_{k-1}, p_k).

Įrodymas. Funkcija $\gamma_{1-}(x)$ yra lyginė, kai $x \in \mathbb{R}$, o $\gamma_{1-}(0) = \frac{1}{\xi}$ ir $\gamma_{1-}(+\infty) = +\infty$. Todėl, turime parodyti, kad ši funkcija didėja intervale $(0, +\infty)$.

Nagrinėkime funkciją $y_1(x) := x\mathrm{cth}\, x$, $x > 0$. Akivaizdu, kad $\mathrm{sh}\, x > x$. Taigi,

$$y_1'(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(2x) - 2x}{2\mathrm{sh}^{\,2} x} > 0,$$

ir $y_1(x)$ yra teigiama didėjanti funkcija, kai $x > 0$. Tada $1/y_1(x) = \frac{1}{x}\mathrm{th}\, x$ yra teigiama mažėjanti funkcija, ir jos išvestinė yra neigiama.

Nagrinėkime funkciją $y(\xi, x) := \frac{1}{\xi}\mathrm{th}\,(\xi x) - \mathrm{th}\, x$, $x > 0$ ir $\xi \in (0, 1)$. Šiai funkcijai

$$\lim_{\xi \to 0+} y(\xi; x) = x - \mathrm{th}\, x > 0, \qquad \lim_{\xi \to 1-} y(\xi; x) = 0, \tag{4.26}$$

visiems $x > 0$. Jos išvestinė (pagal ξ)

$$y'(\xi; x) = \Big(\frac{1}{\xi}\mathrm{th}\,(\xi x)\Big)' = x\Big(\frac{1}{\xi x}\mathrm{th}\,(\xi x)\Big)' < 0.$$

Taigi, $y(\xi; x)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $\xi \in (0, 1)$, ir iš (4.26) gauname, kad $y(\xi; x) > 0$ visiems $\xi \in (0, 1)$ ir visiems $x > 0$.

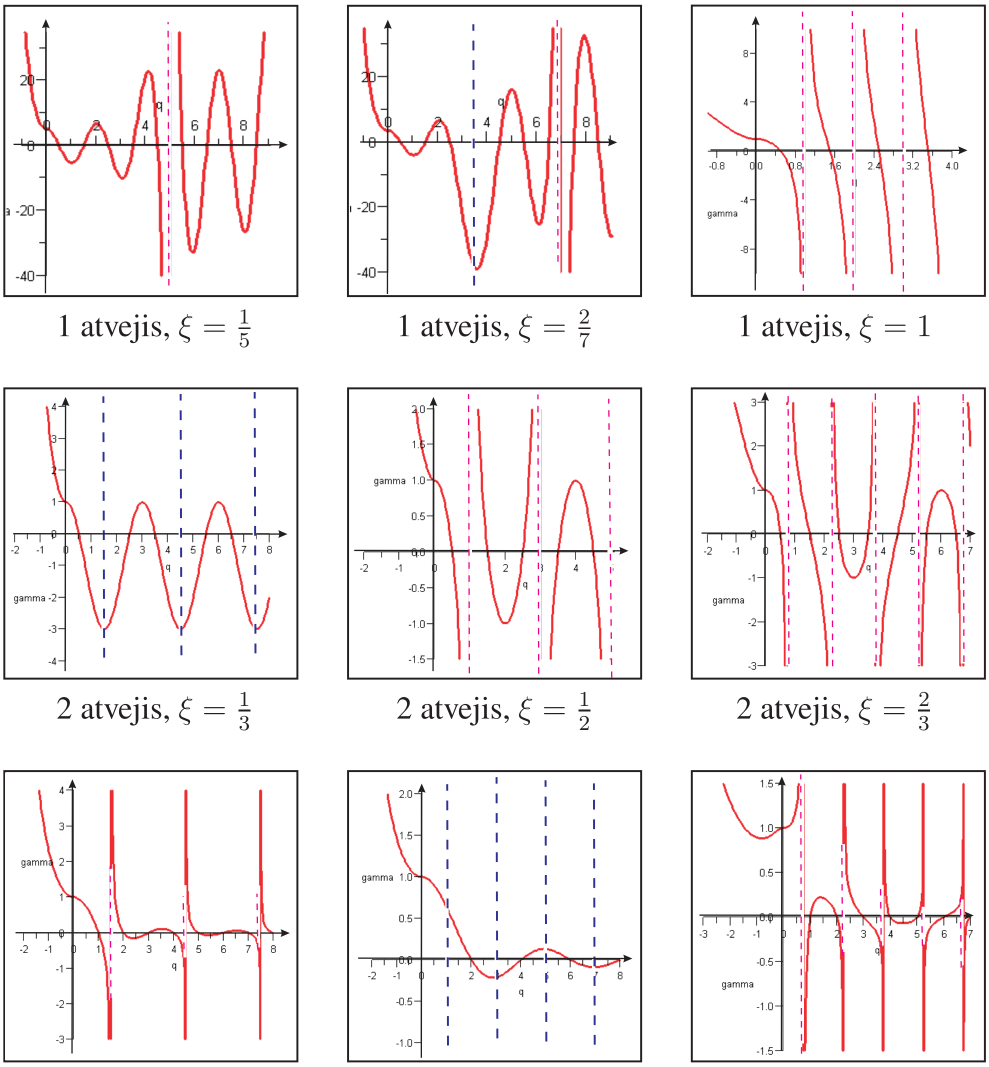
Nagrinėkime funkciją

$$y_2(x, \xi) := \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{sh}\,(\xi x)}, \quad x > 0. \tag{4.27}$$

Jos išvestinė (pagal x)

$$y_2'(x; \xi) = \frac{\mathrm{ch}\, x\mathrm{sh}\,(\xi x) - \xi\mathrm{ch}\,(\xi x)\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{sh}^{\,2}(\xi x)} = \frac{\xi y(\xi, x)\mathrm{ch}\, x\mathrm{ch}\,(\xi x)}{\mathrm{sh}^{\,2}(\xi x)} > 0.$$

Taigi, $y_2(x; \xi)$ yra didėjanti teigiama funkcija visiems $x > 0$ ir $\xi \in (0, 1)$.



1 atvejis, $\xi = \frac{1}{5}$ 1 atvejis, $\xi = \frac{2}{7}$ 1 atvejis, $\xi = 1$

2 atvejis, $\xi = \frac{1}{3}$ 2 atvejis, $\xi = \frac{1}{2}$ 2 atvejis, $\xi = \frac{2}{3}$

3 atvejis, $\xi = \frac{1}{3}$ 3 atvejis, $\xi = \frac{1}{2}$ 3 atvejis, $\xi = \frac{2}{3}$

2.2 pav. Funkcijos $\gamma_l(x\pi)$, $l = 1, 2, 3$

Funkcija

$$\gamma_{1-}(x;\xi) = \frac{x\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}\,\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}\,(\xi x)} = y_1(x)\cdot y_2(x;\xi)$$

yra monotoniškai didėjanti funkcija, kai $x > 0$, kaip teigiamų monotoniškai didėjančių funkcijų sandauga. Kai $\xi = 1$, funkcija $y_2 \equiv 1$, ir šiuo atveju teiginys, taip pat teisingas.

Nagrinėkime funkciją $\gamma_{1+}(x;1) = x\mathrm{ctg}\,x$, $x > 0$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Akivaizdu, kad $\sin x < x$. Taigi,

$$\gamma'_{1+}(x;1) = \frac{\sin(2x) - 2x}{2\sin^2 x} < 0,$$

ir $\gamma_{1+}(x;1)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija intervaluose $(\pi(k-1),\pi k)$, $k\in\mathbb{N}$. ∎

Parodėme, kad $\lambda=0$ egzistuoja tada, ir tik tada, kai $\gamma=\gamma_0=\frac{1}{\xi}$ (2.3.1 lema). Iš 2.3.2 teiginio seka keletas rezultatų apie tikrines reikšmes.

2.4.2 lema. *Kai $\gamma>\gamma_0$, egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, o kai $\gamma\leqslant\gamma_0$, neigiamų tikrinių reikšmių nėra.*

Įrodymas. Funkcija $\gamma_{1-}(x)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $x<0$, $\gamma_{1-}(-\infty)=+\infty$ ir $\gamma_{1-}(0)=\frac{1}{\xi}$. Todėl, lygtis $\gamma=\gamma_{1-}(x)$ turi neigiamą šaknį tik, kai $\gamma>\frac{1}{\xi}$. ∎

2.4.3 lema. *Kai $\xi=1$ visos uždavinio* (2.5)–(2.7) *tikrinės reikšmės 1 atveju su realiaisiais γ yra realios. Kiekviena teigiama tikrinė reikšmė $\lambda_k(\gamma)=x_k^2(\gamma)$, čia $x_k\in(p_{k-1},p_k)$.*

Įrodymas. Įrodymas seka iš 2.4.1 teiginio funkcijai γ_{1+}.∎

2.4.1 *pastaba.* Tikrines reikšmes sunumeruosime tokiu būdu: $x_k(0)=\pi(k-\frac{1}{2})$, t.y., panaudojant klasikinį atvejį.

Šiuo atveju gauname asimptotines tikrinių reikšmių savybes.

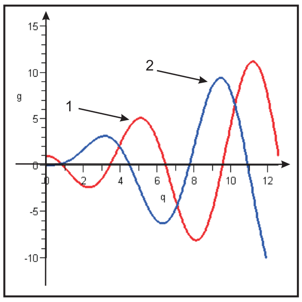
2.4.1 *išvada.* Kai $\xi=1$, (2.5)–(2.7$_1$) uždaviniui teisingos šios savybės:

$$\lim_{\gamma\to-\infty}x_k(\gamma)=p_k,\quad \lim_{\gamma\to+\infty}x_k(\gamma)=p_{k-1}, k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\quad \lim_{\gamma\to+\infty}x_1(\gamma)=-\infty.$$

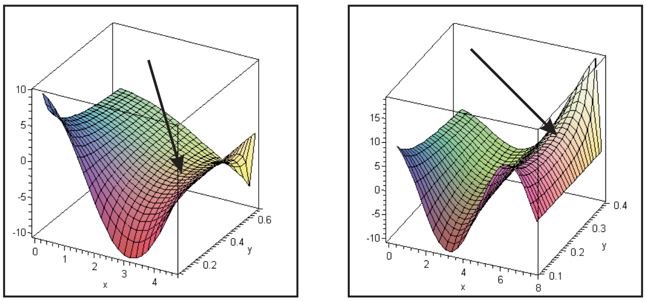
Kitais atvejais ($\xi\in(0,1)$), spektras nėra toks paprastas. Realiesiems γ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės.

Funkcijų $h_1(x):=\cos x-x\sin x$, $h_2(x):=\sin x-x\cos x$, kai $x\geqslant 0$, grafikai yra pateikti 2.3 paveiksle. Tarkime, kad x_0, x_1, x_2 yra trys pirmieji teigiami funkcijos h_1 nuliai ir z_1 yra pirmas teigiamas funkcijos h_2 nulis. Apibrėžkime $\xi_k:=\frac{\pi}{2x_k}$, $\gamma_k:=x_k\cos x_k$ ir $\tilde\gamma:=\frac{z_1}{\sin z_1}$. Tada $x_0\approx 0.8603$, $x_1\approx 3.4256$, $x_2\approx 6.4373$, $\xi_1\approx 0.4585$, $\xi_2\approx 0.2440$, $\gamma_1\approx -3.2884$, $\gamma_2\approx 6.361$, $z_1\approx 4.4934$, $\tilde\gamma_1\approx -4.6033$.

2.4.4 lema. *Jei $\gamma_1\leqslant\gamma\leqslant\gamma_2$, tada visos uždavinio* (2.5)–(2.7) *tikrinės reikšmės yra realiosios visiems $\xi\in(0,1)$, ir ribinis atvejis realizuojamas, kai $\xi=\xi_1$ ir $\xi=\xi_2$. Jei $\gamma_1<\gamma\leqslant 1$, tada visos tikrinės reikšmės yra teigiamos ir paprastos visiems $\xi\in(0,1)$.*



2.3 pav. Funkcijos $h_1(x)$ (1 kreivė) ir $h_2(x)$ (2 kreivė)



a) b)

2.4 pav. Funkcija $\gamma_{1+}(x, \xi)$

Įrodymas. Nagrinėsime tik nepastoviąsias tikrines reikšmes, nes pastoviosios tikrinės reikšmės (jei jos egzistuoja) yra teigiamos. Funkcija γ_{1+} apibrėžia teigiamų tikrinių reikšmių pasiskirstymą. Išskaidome γ_{1+} į daugiklius:

$$\gamma_{1+}(x;\xi) = \frac{x\cos x}{\sin(\xi x)} = g(x;\xi)\cos(x), \qquad \text{čia } g(x;\xi) := \frac{x}{\sin(\xi x)}.$$

Funkcijų $\gamma_{1+}(x;\xi)$, $\pm g(x;\xi)$ ir $\pm x$ grafikai įvairioms parametro ξ reikšmėms yra pateikti 2.5 paveiksle. Kaip matome, funkcijos $\gamma_{1+}(x;\xi)$ grafikas osciliuoja tarp funkcijų $g(x;\xi)$ ir $-g(x;\xi)$. Kadangi,

$$g'(x) = \frac{\sin(\xi x) - \xi x\cos(\xi x)}{\sin^2(\xi x)} = \frac{h_2(\xi x)}{\sin^2(\xi x)}, \tag{4.28}$$

funkcijos $|g(x)|$ minimumo taškai yra $x_{k,min} = \frac{z_k}{\xi}$, $k \in \mathbb{N}$, čia z_k yra teigiama lygties $\sin z - z\cos z = 0$ šaknis ir $g(x_{k,min}) = \frac{\tilde{\gamma}_k}{\xi}$.

Galime rasti funkcijos $\gamma_{1+}(x,\xi)$ ekstremumo taškus

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_{1+}}{\partial x} = \dfrac{(\cos x - x\sin x)\sin(\xi x) - \xi x\cos x\cos(\xi x)}{\sin^2(\xi x)} = 0, \\ \dfrac{\partial\gamma_{1+}}{\partial \xi} = -\dfrac{\xi x\cos x\cos(\xi x)}{\sin^2(\xi x)} = 0. \end{cases}$$

Ši sistema ekvivalenti

$$\begin{cases} \cos x - x\sin x = 0, \\ \cos(\xi x) = 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

Taigi, ekstremumo taškai yra x_k, $k \in \mathbb{N}$, ir jie nepriklauso nuo ξ $\big(x_0 \approx 0.8603$ netenkina lygties $\cos(\xi x) = 0$, kai $\xi \in (0,1)\big)$. Kai x_1, gauname $\xi_1 = \frac{\pi}{2x_1}$; kai x_2, gauname $\xi_2 = \frac{\pi}{2x_2}$ ir $\xi_2' = \frac{3\pi}{2x_2} \approx 0.732$; kai $x_3 \approx 9.5293$, yra trys tokie $\xi_3 = \frac{\pi}{2x_3}$, $\xi_3' = \frac{3\pi}{2x_3}$, $\xi_3'' = \frac{5\pi}{2x_3}$, ir taip toliau.

Kadangi, $\gamma_{1+}'(c_k;\xi) = \frac{\gamma_{1+}(c_k;\xi)}{c_k} \neq 0$ (2.3.7 pastaba) turi tą patį ženklą kaip ir funkcija, pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai nėra funkcijos $\gamma_{1+}(x,\xi)$ ekstremumo taškai, ir jie, taip pat nėra vienmatės funkcijos $\gamma_{1+}(x;\xi)$ ekstremumo taškai.

Tai seka iš 2.4.1 lemos, nes, kai $|\gamma| \leqslant 1$, funkcija $\gamma = \frac{\cos x}{\sin(\xi x)}$ neturi kompleksinių γ-reikšmių. Taigi, funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ neturi kompleksinių γ-reikšmių, kai $|\gamma| \leqslant x$ visiems $\xi \in (0,1)$, todėl šią lemą turime įrodyti tik, kai $0 < x < \gamma_2$, kai $\gamma > 0$, ir $0 < x < |\gamma_1|$, kai $\gamma < 0$. Kadangi, $|\gamma_1| < \gamma_2 < 3\pi \leqslant \frac{3\pi}{\xi}$, tirsime funkciją γ_{1+}, kai $x \in (0, \frac{3\pi}{\xi})$. Taškai $\tilde{x}_1 = \frac{\pi}{\xi}$, $\tilde{x}_2 = \frac{2\pi}{\xi}$ ir $\tilde{x}_3 = \frac{3\pi}{\xi}$ gali būti poliai arba pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai.

Jei $\xi > \frac{6}{7}$, tai $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ yra poliai ir funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ mažėja kiekviename intervale $(0,\tilde{x}_1)$, $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$, $(\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)$. Taigi, šiuo atveju visos γ-reikšmės yra realiosios. Jei $\xi \leqslant \frac{6}{7}$, tai $\frac{2\pi}{\xi} \geqslant \frac{7\pi}{3} > \gamma_2$ ir tirsime funkciją γ_{1+}, kai $x \in (0, \frac{2\pi}{\xi})$.

Jei $\frac{4}{5} < \xi \leqslant \frac{6}{7}$, tai $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ yra poliai ir funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ yra mažėjanti kiekviename intervale $(0,\tilde{x}_1)$, $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$. Taigi, šiuo atveju visos γ-reikšmės yra realiosios.

Jei $\xi = \frac{4}{5}$, tai $\tilde{x}_1$ yra polius ir $\tilde{x}_2 = c_1$ yra pastoviosios tikrinės reikšmės taškas. Funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ mažėja kiekviename intervale $(0,\tilde{x}_1)$, $(\tilde{x}_1,c_1)$ ir $\gamma_{1+}(c_1) = -\frac{25\pi}{8} < \gamma_1$. Taigi, šiuo atveju visos γ-reikšmės yra realios, kai $\gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2$.

Jei $\frac{2}{3} < \xi < \frac{4}{5}$ (2.5 paveikslas, $\xi = \frac{3}{4}$), tai $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ yra poliai. Funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ yra mažėjanti funkcija, kai $x \in (0,\tilde{x}_1)$ ir turi vieną (neigiamą) lokaliojo minimumo tašką x_{min}, kai $x \in (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ ir $\gamma_{1+}(x_{min};\xi) \leqslant g(z_1;\xi) = -\frac{\tilde{\gamma}_1}{\xi} \leqslant -\frac{5\tilde{\gamma}_1}{4} < \gamma_1$. Taigi, šiuo atveju lema yra teisinga.

Jei $\xi = \frac{2}{3}$ (2.5 paveikslas, $\xi = \frac{2}{3}$), tada $\tilde{x}_1 = q_1$ yra pastoviosios tikrinės reikšmės taškas, ir $\tilde{x}_2$ yra polius. Funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ yra mažėjanti, kai $x \in (0,c_1]$, $\gamma_{1+}\big(c_1,\frac{2}{3}\big) = -\frac{9\pi}{4} < \gamma_1$ ir turi vieną lokaliojo minimumo tašką x_{min}, kai $x \in (c_1,\tilde{x}_2)$. Taigi, šiuo atveju lema taip pat teisinga.

Jei $\xi < \frac{2}{3}$, tada $|\gamma_1| < \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{\xi}$ ir kai $\gamma < 0$, turime įrodyti, kad intervale $(0, 3\pi/2)$ egzistuoja tik realiosios γ-reikšmės. Šiame intervale funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ turi tik vieną lokaliojo minimumo tašką x_{min}, ir ji yra monotoninė intervaluose $(0,x_{min})$ ir $(x_{min},3\pi/2)$, o $\gamma_{1+}(\pi/2;\xi) = \gamma_{1+}(3\pi/2;\xi) = 0$. Kai $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$, egzistuoja tik vienas funkcijos $\gamma_{1+}(x,\xi)$ ekstremumo taškas (x_1,ξ_1) (2.4 paveikslas, a)) ir $\gamma_{1+}(x_1,\xi_1) = \gamma_1$. Šis taškas yra balno taškas. Taigi, neigiamiems γ lema įrodyta. Pastebėsime, kad funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ yra teigiama ir monotoninė funkcija, kai $x \in (0,\pi/2)$. Nagrinėsime šią funkciją, kai $x > \frac{3\pi}{2}$ ir $\gamma > 0$.

Jei $\frac{4}{7} < \xi < \frac{2}{3}$, tai $\tilde{x}_1$ ir $\tilde{x}_2$ yra poliai. Jei $\xi = \frac{4}{7}$, tada $\tilde{x}_2 = c_1$ yra pastoviosios tikrinės reikšmės taškas. Funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ didėja, kai $x \in (3\pi/2, \pi/\xi)$ ir $x \in (5\pi/2, 2\pi/\xi)$. Jei $\xi = \frac{4}{7}$, tada $\gamma_{1+}(c_1, 4/7) = \frac{49}{8}\pi > \gamma_2$.

Jei $\frac{4}{9} < \xi < \frac{4}{7}$, tada $\tilde{x}_1$ ir $\tilde{x}_2$ yra poliai. Funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ didėja, kai $x \in (3\pi/2, \pi/\xi)$ ir turi vieną lokaliojo maksimumo tašką x_{max}, kai $x \in (5\pi/2, 7\pi/2)$ ir $\gamma_{1+}(x_{max}, \xi) \geqslant \frac{\tilde{\gamma}_1}{\xi} > \frac{9\tilde{\gamma}_1}{4} > \gamma_2$. Jei $\xi \leqslant \frac{4}{9}$, tada $\frac{\pi}{\xi} > \frac{9\pi}{4} > \gamma_2$, ir galime nagrinėti tik $x \in (5\pi/2, \pi/\xi)$.

Jei $\frac{2}{5} < \xi < \frac{4}{9}$, tada $\tilde{x}_1$ yra polius. Jei $\xi = \frac{4}{7}$, tada $\tilde{x_2} = c_1$ yra pastoviosios tikrinės reikšmės taškas. Funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ didėja, kai $x \in (3\pi/2, \pi/\xi)$ ir $x \in (5\pi/2, 2\pi/\xi)$. Jei $\xi = \frac{4}{7}$, tai $\gamma_{1+}(c_1, 2/5) = \frac{25}{4}\pi > \gamma_2$.

Jei $\xi < \frac{2}{5}$, tada $\gamma_2 < \frac{5\pi}{2} < \frac{\pi}{\xi}$, ir kai $\gamma > 0$, reikia įrodyti, kad intervale $(3\pi/2, 5\pi/2)$ egzistuoja tik realiosios γ-reikšmės. Šiame intervale funkcija $\gamma_{1+}(x;\xi)$ turi vienintelį lokaliojo maksimumo tašką x_{max} ir yra monotoninė intervaluose $(3\pi/2, x_{min})$, $(x_{min}, 5\pi/2)$, o $\gamma_{1+}(3\pi/2;\xi) = \gamma_{1+}(5\pi/2;\xi) = 0$. Kai $x \in (3\pi/2, 5\pi/2)$, funkcija $\gamma_{1+}(x,\xi)$ turi du ekstremumo taškus (x_2, ξ_2) ir (x_2, ξ_2'), tačiau $\xi_2' > \frac{2}{5}$. Gauname balno tašką (2.4 paveikslas, a)) ir $\gamma_{1+}(x_2, \xi_2) = \gamma_2$. Taigi, įrodėme lemą teigiamiems γ.

Kai $\gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_2$, horizontali tiesė γ kerta funkcijos γ_{1+} grafikus. Jei $\gamma = 0$, tai gauname klasikinį atvejį su visomis teigiamomis ir paprastomis tikrinėmis reikšmėmis. Kai $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, visos tikrinės reikšmės išlieka realiosios ir paprastos. Galime jas užrašyti kaip klasikiniame atvejyje.

Kai $\gamma > \frac{1}{\xi}$, turime vieną neigiamą tikrinę reikšmę. Taigi, visos tikrinės reikšmės bus teigiamos visiems $\xi \in (0, 1)$, jei $\gamma \leqslant 1$. ∎

2.4.2 *pastaba.* Kai $\xi = \xi_1$ ir $\gamma = \gamma_1$ arba $\xi = \xi_2$ ir $\gamma = \gamma_2$, tai egzistuoja viena kartotinė tikrinė reikšmė.

2.4.3 *pastaba.* Kaip funkcija γ_1 keičiasi šalia pastoviosios tikrinės reikšmės taško įvairiems ξ_k $(\xi_{k-1} < \xi_k)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ parodyta 2.6 paveiksle. Kai $k = 4$, gauname pastoviąją tikrinę reikšmę.

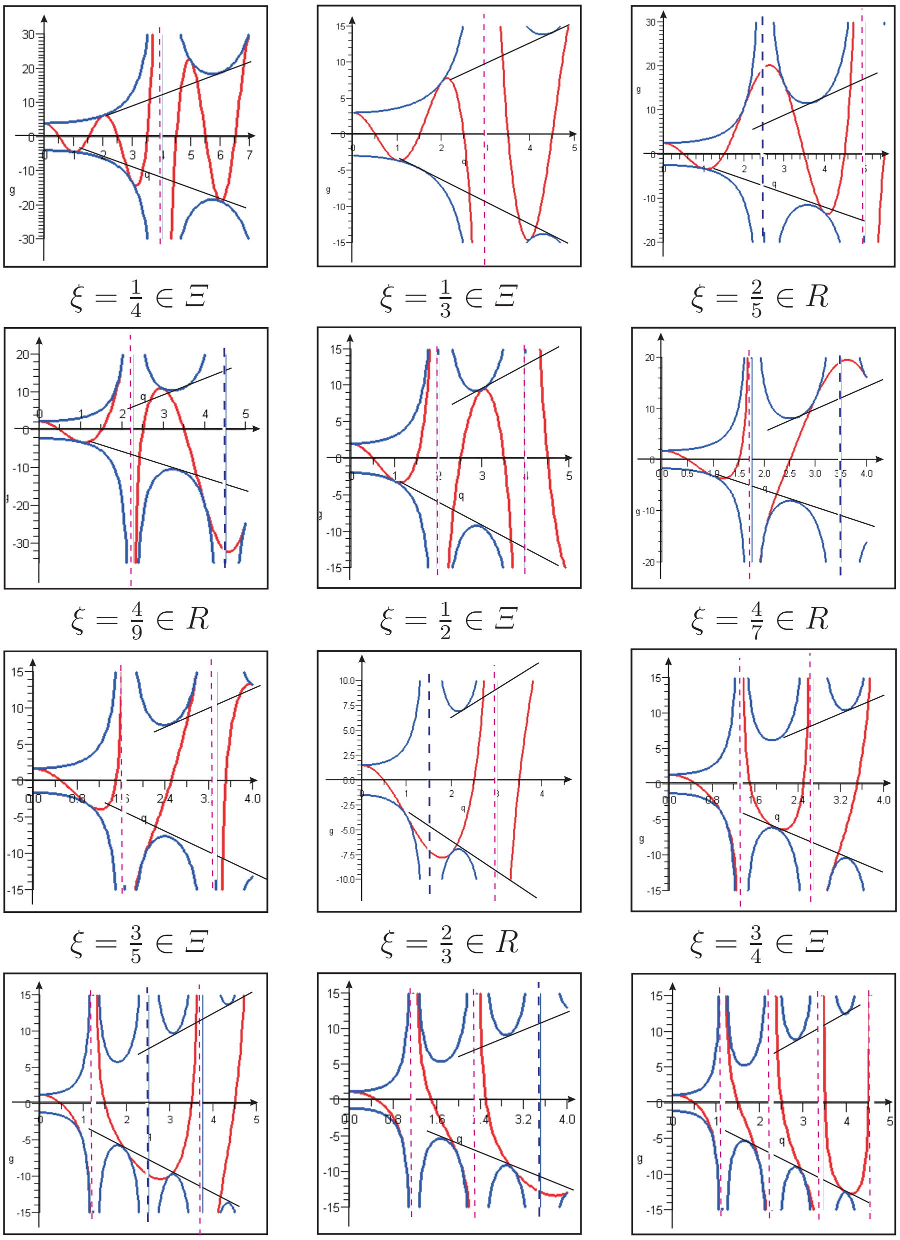
Tegul $\tilde{p}_k = \frac{\pi}{\xi}k$, $k \in \mathbb{N}$, t.y. $\tilde{p}_k$ yra poliai arba pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, tada

$$\sigma_1(\gamma_{1+}, \tilde{p}_k) = (-1)^k \text{sign } \cos\left(\tfrac{1}{\xi}\pi k\right) = (-1)^k \text{sign } \cos \tilde{p}_k. \tag{4.30}$$

2.4.2. Realiosios tikrinės reikšmės 2 atveju

2.4.2 teiginys. *Funkcija $\gamma_{2-}(x;\xi)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $x < 0$ visiems $\xi \in [0, 1)$.*

Įrodymas. Kai $\xi = 0$, funkcija $\gamma_{2-} = \operatorname{ch} x$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija. Funkcija $\gamma_{2-}(x)$ yra lyginė, kai $x \in \mathbb{R}$, ir $\gamma_{2-}(0) = 1$, $\gamma_{2-}(+\infty) = +\infty$. Todėl, reikia parodyti, kad ši funkcija yra didėjanti intervale $(0, +\infty)$.



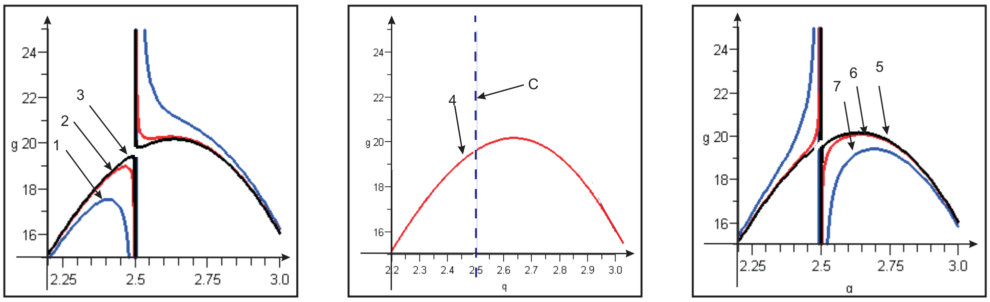
$\xi = \frac{1}{4} \in \Xi$ $\xi = \frac{1}{3} \in \Xi$ $\xi = \frac{2}{5} \in R$

$\xi = \frac{4}{9} \in R$ $\xi = \frac{1}{2} \in \Xi$ $\xi = \frac{4}{7} \in R$

$\xi = \frac{3}{5} \in \Xi$ $\xi = \frac{2}{3} \in R$ $\xi = \frac{3}{4} \in \Xi$

$\xi = \frac{4}{5} \in R$ $\xi = \frac{6}{7} \in R$ $\xi = \frac{7}{8} \in \Xi$

2.5 pav. Funkcijos $\gamma_{1+}(x\pi; \xi)$



2.6 pav. Funkcijos $\gamma_{1+}(x\pi;\xi)$ grafikai šalia pastoviosios tikrinės reikšmės taško įvairiems ξ_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\xi_k < \xi_{k+1}$

Funkcija $y_1(x) := x\operatorname{th} x$, $x > 0$ yra monotoniškai didėjanti funkcija, kaip tokių dviejų funkcijų sandauga.

Nagrinėkime funkciją $y(\xi;x) := \xi\operatorname{th}(\xi x) - \operatorname{th} x$, $x > 0$ ir $\xi \in (0,1)$. Šiai funkcijai

$$\lim_{\xi\to 0+} y(\xi;x) = -\operatorname{th} x < 0, \quad \lim_{\xi\to 1-} y(\xi;x) = 0 \tag{4.31}$$

visiems $x > 0$. Jos išvestinė (ξ atžvilgiu) lygi

$$y'(\xi;x) = \Big(\xi\operatorname{th}(\xi x)\Big)' = \frac{1}{x}\Big((\xi x)\operatorname{th}(\xi x)\Big)' > 0.$$

Taigi, $y(\xi;x)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija, kai $\xi \in (0,1)$ ir iš (4.31) gauname, kad $y(\xi,x) < 0$ visiems $\xi \in (0,1)$ ir visiems $x > 0$.

Funkcijos $\gamma_{2-}(x)$ išvestinė lygi

$$\frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch}(\xi x) - \xi\operatorname{ch} x\operatorname{sh}(\xi x)}{\big(\operatorname{ch}(\xi x)\big)^2} = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(\xi x)}\big(\xi\operatorname{th}(\xi x) - \operatorname{th} x\big) > 0.$$

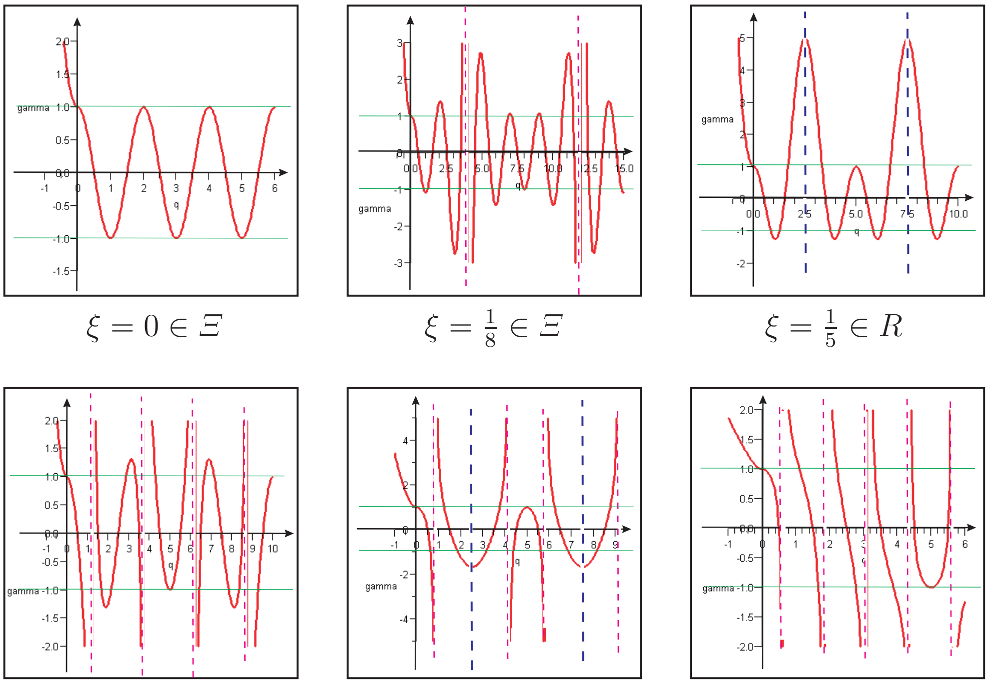
Taigi, funkcija $\gamma_{2-}(x;\xi)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija, kai $x > 0$ ir monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $x < 0$. ■

Tada iš 2.4.2 teiginio seka pagrindinis rezultatas apie neigiamas tikrines reikšmes.

2.4.5 lema. *Kai $\gamma > \gamma_0 = 1$ egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, o kai $\gamma \leqslant \gamma_0$ neigiamų tikrinių reikšmių nėra.*

Įrodymas. Funkcija $\gamma_{2-}(x)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $x < 0$, $\gamma_{2-}(-\infty) = +\infty$ ir $\gamma_{2-}(0) = 1$. Todėl, lygtis $\gamma = \gamma_{2-}(x)$ turi vieną neigiamą šaknį, tik kai $\gamma > \gamma_0 = 1$ ir neigiamų šaknų nėra, kai $\gamma \leqslant \gamma_0$. ■

Kitas pagrindinis rezultatas šiuo atveju yra apie realiąsias tikrines reikšmes.



$\xi = 0 \in \Xi$ $\quad$ $\xi = \frac{1}{8} \in \Xi$ $\quad$ $\xi = \frac{1}{5} \in R$

$\xi = \frac{2}{5} \in \Xi$ $\quad$ $\xi = \frac{3}{5} \in R$ $\quad$ $\xi = \frac{4}{5} \in \Xi$

2.7 pav. Funkcijos $\gamma_2(x\pi; \xi)$

2.4.6 lema. *Kai $|\gamma| \leqslant 1$ visos tikrinės reikšmės yra realiosios.*

Įrodymas. Įrodymas seka iš 2.4.1 lemos (2 atv.). ■

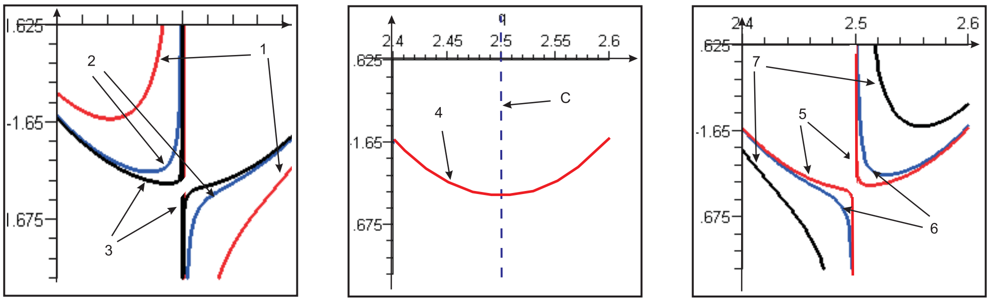
Jei $|\gamma| \geqslant 1$, tada egzistuoja tikrinės reikšmės, kurios gali būti kartotinės ir kompleksinės. Keletas funkcijos γ_2 pavyzdžių įvairiems ξ pateikti 2.7 paveiksle.

Tegul $\tilde{p}_k = \frac{\pi}{\xi}(k - \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{N}$, t.y. $\tilde{p}_k$ yra poliai arba pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, tada

$$\sigma_1(\gamma_{2+}, \tilde{p}_k) = (-1)^{k-1} \text{sign} \cos\left(\tfrac{1}{\xi}\pi(k - \tfrac{1}{2})\right) = (-1)^{k-1} \text{sign} \cos \tilde{p}_k. \qquad (4.32)$$

Šturmo ir Liuvilio uždavinio (2.5)-(2.7$_2$) tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas, kai $\gamma \in (0, 1]$ ir $\xi = 0$, tyrė A. Gulin, N. Ionkin ir V. Morozova [44]. Šiame straipsnyje buvo nagrinėjamas diskretusis (2.5)-(2.7$_2$) uždavinio atvejis, kai $hN = 1$, h – diskrečiojo tinklo žingsnis, N – intervalo padalinimų skaičius, $k = 1, 2, ..., (N - 1)/2$, kai N – nelyginis ir $k = 1, 2, ..., N/2$, kai N – lyginis. Gautos tikrinių reikšmių išraiškos, kai $\gamma = 1$:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = 4h^{-2} \sin^2(\pi k h), \qquad (4.33)$$



2.8 pav. Funkcijos $\gamma_{2+}(x\pi;\xi)$ grafikai šalia pastoviosios tikrinės reikšmės taško įvairiems ξ_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\xi_k < \xi_{k+1}$

ir kai $\gamma \in (0, 1)$:

$$\lambda_0 = 4h^{-2}\sin^2\frac{\psi h}{2}, \tag{4.34}$$

$$\lambda_{2k-1} = 4h^{-2}\sin^2((\pi k - 0.5\psi)h), \tag{4.35}$$

$$\lambda_{2k} = 4h^{-2}\sin^2((\pi k + 0.5\psi)h), \tag{4.36}$$

čia $\psi = \arccos\gamma$, $0 < \psi < \pi$. Norėdami palyginti šioje disertacijoje gautas tikrines reikšmes su [44] straipsnyje aprašytomis tikrinėmis reikšmėmis, (4.33) išraiškoje perėję prie ribos, kai $h \to 0$, gauname:

$$\lambda_0^r = 0, \quad \lambda_k^r = (2\pi k)^2,\ k = 1, 2...,$$

ir šios tikrinės reikšmės sutampa su (2.5)–(2.7$_2$) uždavinio tikrinėmis reikšmėmis. Perėję prie ribos (4.34)–(4.36), kai $h \to 0$, gauname:

$$\lambda_0^r = \arccos^2\gamma, \tag{4.37}$$

$$\lambda_{2k-1}^r = 4(\pi k - 0.5\psi)^2, \tag{4.38}$$

$$\lambda_{2k}^r = 4(\pi k + 0.5\psi)^2. \tag{4.39}$$

Kai $\gamma \in (0, 1)$, uždavinio (2.5)–(2.7$_2$) tikrinės reikšmės yra lygios $\lambda = \arccos^2\gamma$. Vadinasi, šiuo atveju tikrinės reikšmės taip pat sutampa su [44] straipsnyje gautomis tikrinėmis reikšmėmis.

2.4.3. Realiosios tikrinės reikšmės 3 atveju

Trečiuoju kraštinių sąlygų atveju realusis spektras yra sudėtingesnis (2.9 paveikslas). Šiuo atveju $\gamma_0 = 1$. Kai γ yra realusis, gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės visiems $\gamma \neq 0$. Pavyzdžiui, jei $\xi = \frac{1}{2}$, tai $\gamma_{3+}(x) = \frac{2}{x}\sin(x/2)$ ir $|\gamma_{3+}| \leqslant \frac{2}{x}$.

2.4.3 teiginys. *Funkcija $\gamma_{3+}(x;1)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija kiekviename intervale (p_{k-1}, p_k); funkcija $\gamma_{3-}(x;1)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija, kai $x < 0$. Funkcija $\gamma_{3-}(x;\xi)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, kai $x < 0$ tik kai $\xi \in [0, \sqrt{3}/3]$ ir turi vieną lokaliojo minimumo tašką $x_{\min} \in (-\infty, 0)$, kai $\xi \in (\sqrt{3}/3, 1)$.*

Įrodymas. Funkcijos $\gamma_{3-}(x;1) = 1/\gamma_{1-}(x;1)$, $\gamma_{3+}(x;1) = 1/\gamma_{1+}(x;1)$. Taigi, kai $\xi = 1$, įrodymą gauname iš 2.4.1 teiginio.

2.4.1 teiginyje parodyta (4.27), kad $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}(\xi x)}$ yra teigiama didėjanti funkcija visiems $x > 0$ ir $\xi \in (0,1)$. Taigi, funkcija

$$y_1(x;\xi_1,\xi_2) := \frac{\operatorname{sh}(\xi_1 x)}{\operatorname{sh}(\xi_2 x)}, \quad x > 0, \quad 0 < \xi_2 < \xi_1,$$

yra didėjanti ir teigiama. Kadangi $\lim_{x\to 0} y_1(x;\xi_1,\xi_2) = \xi_1/\xi_2 > 0$, turime

$$\xi_2 \operatorname{sh}(\xi_1 x) - \xi_1 \operatorname{sh}(\xi_2 x) > 0, \quad \text{for } x > 0, \quad 0 < \xi_2 < \xi_1. \tag{4.40}$$

Nagrinėkime teigiamą funkciją

$$y_2(x;\xi_1,\xi_2) := \frac{\operatorname{th}(\xi_2 x)}{\operatorname{th}(\xi_1 x)}, \quad x > 0, \quad 0 < \xi_2 < \xi_1.$$

Jos išvestinė (pagal x)

$$y_2'(x;\xi_1,\xi_2) = \frac{\xi_2 \operatorname{sh}(2\xi_1 x) - \xi_1 \operatorname{sh}(2\xi_2 x)}{2\operatorname{sh}^2(\xi_1 x)\operatorname{ch}^2(\xi_2 x)} > 0 \quad \text{kai } x > 0, \quad 0 < \xi_2 < \xi_1.$$

Taigi, gauname, kad

$$y_3(x;\xi) := \frac{\operatorname{th}(\frac{1}{2}x)}{\xi \operatorname{th}(\xi x)}, \quad x > 0,$$

yra teigiama didėjanti funkcija visiems $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Funkcija

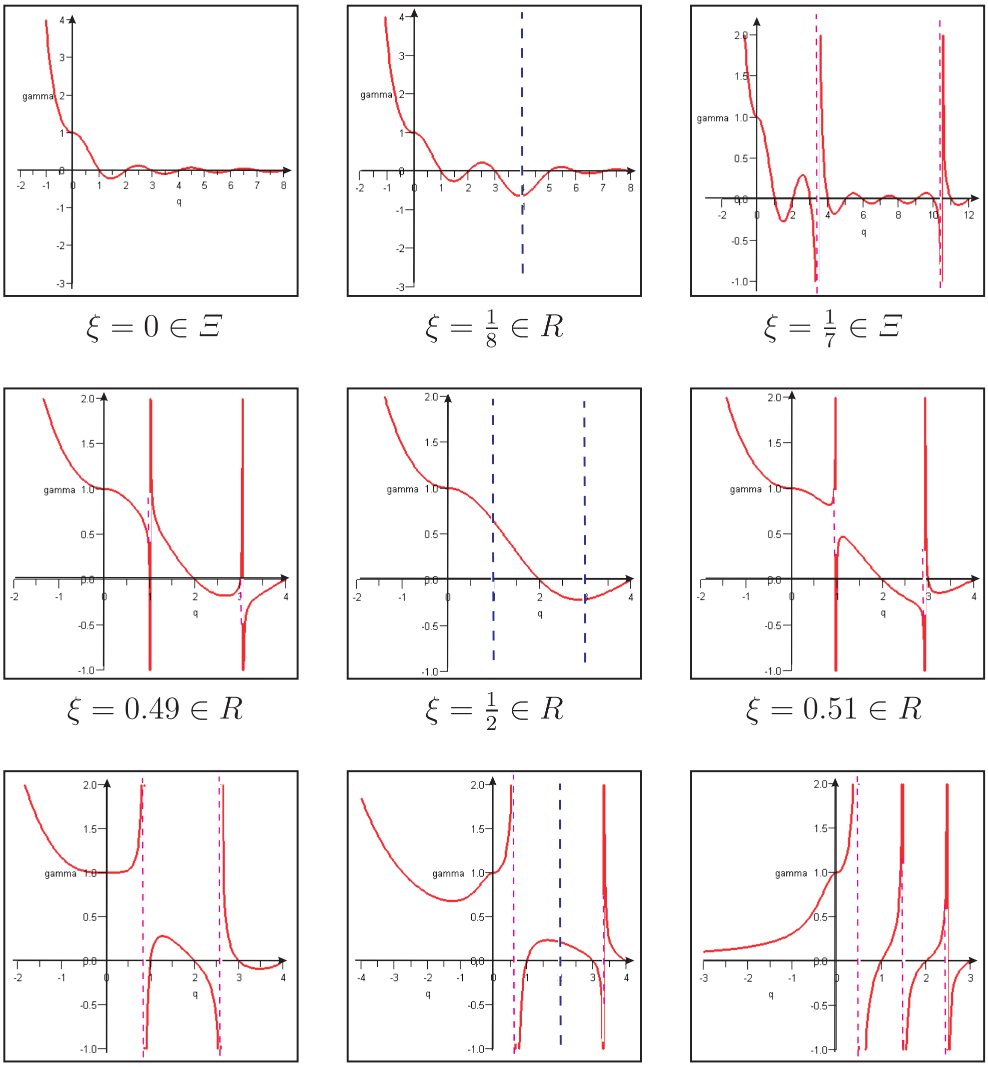
$$y_4(x) := 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x - 3x \operatorname{ch} x,$$

$y_4(0) = 0$, $y_4'(0) = 0$ ir, kai $x > 0$

$$\begin{aligned} y_4''(x) &= 8\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - 5\operatorname{sh} x - 3x\operatorname{ch} x \\ &= 3\operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x - x) + 5\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x - 1) > 0. \end{aligned}$$

Taigi, funkcija $y_4(x)$, $x > 0$ yra teigiama. Funkcija

$$y_5(x) := \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x - x^2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x - x,$$



$\xi = 0 \in \Xi$ $\quad$ $\xi = \frac{1}{8} \in R$ $\quad$ $\xi = \frac{1}{7} \in \Xi$

$\xi = 0.49 \in R$ $\quad$ $\xi = \frac{1}{2} \in R$ $\quad$ $\xi = 0.51 \in R$

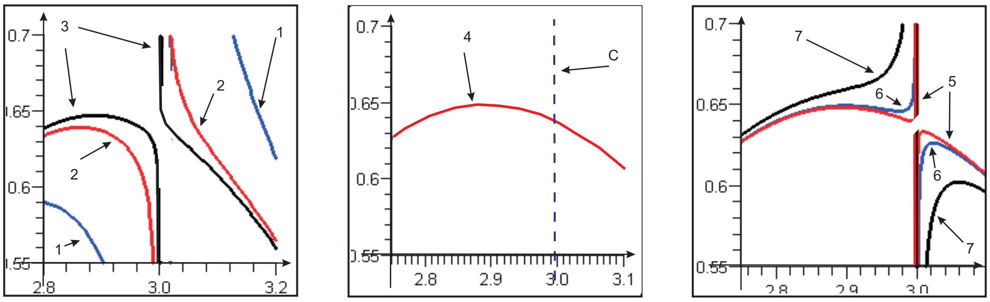
$\xi = \frac{\sqrt{3}}{3} \in \Xi$ $\quad$ $\xi = \frac{3}{4} \in R$ $\quad$ $\xi = 1 \in \Xi$

2.9 pav. Funkcijos $\gamma_3(x\pi;\xi)$

$y_5(0) = 0$, $y_5'(0) = 0$, ir kai $x > 0$

$$\begin{aligned} y_5''(x) &= 4\mathrm{sh}\, x\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x - 3x\mathrm{ch}\, x - x^2\mathrm{sh}\, x \\ &= 2\mathrm{sh}\,(\mathrm{ch}\, x - 1 - \tfrac{1}{2}x^2) + 2\mathrm{sh}\, x\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x - 3x\mathrm{ch}\, x \\ &= 2\mathrm{sh}\,(\mathrm{ch}\, x - 1 - \tfrac{1}{2}x^2) + y_4(x) > 0. \end{aligned}$$

Taigi, funkcija $y_5(x)$, $x > 0$, taip pat yra teigiama.



2.10 pav. Funkcijos $\gamma_{3+}(x\pi;\xi)$ grafikai šalia pastoviosios tikrinės reikšmės taško įvairiems ξ_k, $k=1,2,3,4,5,6$, $\xi_k<\xi_{k+1}$

Pastebėsime, kad funkcija $x\operatorname{cth} x-1=(x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)/\operatorname{sh} x>0$. Teigiamos funkcijos

$$y_6(x):=\frac{x\operatorname{cth} x-1}{x\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}x\right)}=\frac{x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}{x(\operatorname{ch} x-1)},\quad x>0,$$

išvestinė yra lygi

$$y_6'(x)=\frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x-1-x^2)+x(\operatorname{ch} x-1)}{x^2(\operatorname{ch} x-1)^2}=\frac{y_5(x)}{x^2(\operatorname{ch} x-1)^2}>0.$$

Taigi, funkcija

$$y(x;\xi):=\frac{x\operatorname{cth} x-1}{x\xi\operatorname{th}(\xi x)}=y_6(x)\cdot y_3(x;\xi)$$

yra teigiama didėjanti funkcija visiems $x\geqslant 0$, $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ ir

$$y_0:=\lim_{x\to 0}y(x;\xi)=\frac{1}{3\xi^2};\quad y_\infty:=\lim_{x\to+\infty}y(x;\xi)=\frac{1}{\xi}>1.$$

Jei $\xi\in(\frac{1}{2},\sqrt{3}/3]$, tai $y_0\geqslant 1$ ir $y(x;\xi)>1$ visiems $x>0$; jei $\xi\in(\sqrt{3}/3,1)$, tada $y_0<1$, ir egzistuoja $x_{\min}=x_{\min}(\xi)>0$, toks, kad $y(x_{\min};\xi)=1$ ir $y(x;\xi)<1$ visiems $0<x<x_{\min}$, $y(x;\xi)>1$ visiems $x>x_{\min}$.

Suformuluokime šias savybes funkcijai

$$f(x;\xi):=x\operatorname{cth} x-1-x\xi\operatorname{th}(\xi x),$$

t.y. jei $\xi\in(\frac{1}{2},\sqrt{3}/3]$, tada $f(x;\xi)>0$ visiems $x>0$; jei $\xi\in(\sqrt{3}/3,1)$, tai egzistuoja $x_{\min}=x_{\min}(\xi)>0$, toks, kad $f(x_{\min};\xi)=0$ ir $f(x;\xi)<0$ visiems $0<x<x_{\min}$, $f(x;\xi)>0$ visiems $x>x_{\min}$.

Kadangi,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\big(x\xi\operatorname{th}(\xi x)\big)=x\operatorname{th}(\xi x)+\frac{x\xi^2}{\operatorname{ch}^2(\xi x)}>0\quad\text{kai } x>0,$$

gauname $\xi x \mathrm{th}\,(\xi x) < \frac{1}{2} x \mathrm{th}\,(\frac{1}{2}x)$, ir kai $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ įvertiname

$$f(x;\xi) \geqslant x\mathrm{cth}\,x - 1 - \tfrac{1}{2}x\mathrm{th}\,(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}x\mathrm{cth}\,(\tfrac{1}{2}x) - 1 > 0.$$

Vadinasi,

$$\gamma'_{3-}(x;\xi) = \frac{x\mathrm{cth}\,x - 1 - x\xi\mathrm{th}\,(\xi x)}{x^2\mathrm{ch}^2(\xi x)} = f(x;\xi)\frac{\mathrm{sh}\,x}{x^2\mathrm{ch}\,(\xi x)}.$$

Funkcija $\gamma_{3-}(x;\xi)$, $x \in \mathbb{R}$ yra lyginė funkcija. Taigi, funkcijos $\gamma_{3-}(x;\xi)$, $x < 0$ monotoniškumo savybės, seka iš funkcijos $f(x;\xi)$ savybių: jei $\xi \in [0, \sqrt{3}/3]$, tai $\gamma_{3-}(x;\xi)$ yra mažėjanti funkcija, kai $x \leqslant 0$; jei $\xi \in (\sqrt{3}/3, 1)$, tai egzistuoja $x_{\min} = x_{\min}(\xi) < 0$, toks, kad $\gamma_{3-}(x;\xi)$ yra mažėjanti funkcija, kai $x \leqslant x_{\min}$, ir $\gamma_{3-}(x;\xi)$ yra didėjanti funkcija, kai $x_{\min} \leqslant x \leqslant 0$; jei $\xi = 1$, tai $\gamma_{3-}(x;\xi)$ yra didėjanti funkcija, kai $x \leqslant 0$. ■

2.4.7 lema. *Jei $\xi \in [0, \sqrt{3}/3]$, tai egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė tik, kai $\gamma > \gamma_0$. Jei $\xi \in (\sqrt{3}/3, 1)$, tai egzistuoja $x_{\min} < 0$ ir $\gamma_* = \gamma_{3-}(x_{\min};\xi) \in (0, \gamma_0)$, toks, kad egzistuoja viena neigiama kartotinė tikrinė reikšmė, kai $\gamma = \gamma_*$ ir tik viena paprasta tikrinė reikšmė, kai $\gamma > \gamma_0$, dvi neigiamos tikrinės reikšmės egzistuoja, kai $\gamma \in (\gamma_*, \gamma_0)$, o kai $\gamma < \gamma_*$ neigiamų tikrinių reikšmių nėra. Jei $\xi = 1$, tai viena neigiama tikrinė reikšmė egzistuoja tik teigiamiems $\gamma < \gamma_0$, o kai $\gamma \geqslant \gamma_0$, neigiamų tikrinių reikšmių nėra.*

Įrodymas. Funkcija $\gamma_{3-}(x;\xi)$ yra teigiama. Iš 2.4.3 teiginio ir

$$\gamma_{3-}(-\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{kai } \xi < 1, \\ 0, & \text{kai } \xi = 1; \end{cases} \qquad \gamma_{3-}(0) = 1,$$

sąlygų, gauname šios lemos įrodymą. ■

2.4.4 *pastaba.* Kaip funkcija γ_3 keičiasi šalia pastoviosios tikrinės reikšmės taško įvairiems ξ_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ parodyta 2.10 paveiksle. Kai $k = 4$, gauname pastoviąją tikrinę reikšmę.

Tegul $\tilde{p}_k = \frac{\pi}{\xi}(k - \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{N}$, t.y. $\tilde{p}_k$ yra poliai arba pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, tada

$$\sigma_1(\gamma_{1+}, \tilde{p}_k) = \begin{cases} (-1)^k \mathrm{sign}\,\sin\tilde{p}_k, & \text{kai } \xi > 0, \\ 0, & \text{kai } \xi = 0. \end{cases} \tag{4.41}$$

2.5. Pagrindiniai skyriuje gauti rezultatai

- Ištirta Šturmo ir Liuvilio uždavinio realiosios spektro dalies priklausomybė nuo parametrų γ ir ξ.

- Šis uždavinys visais trimis nelokaliųjų kraštinių sąlygų atvejais turi vieną nulinę tikrinę reikšmę, kai parametras $\gamma = \gamma_0$, $\gamma_0 = \frac{1}{\xi}$ (1 atv.), $\gamma_0 = 1$ (2, 3 atv.).

- Šturmo ir Liuvilio uždavinyje (1, 2 atv.) egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, kai $\gamma > \gamma_0$. 3 atv. viena neigiama tikrinė reikšmė egzistuoja tik, kai $\xi \leq \sqrt{3}/3$ ir $\gamma > 1$, ir kai $\xi = 1$ ir $0 < \gamma < 1$.

- Teigiamos spektrų dalys realiesiems γ yra skirtingos. Šturmo ir Liuvilio uždavinyje 1 ir 2 atv. visos realiosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik intervale $\gamma_m(\xi) \leq \gamma \leq \gamma_M(\xi)$, tačiau šis intervalas $[\bar{\gamma}_m, \bar{\gamma}_M] \subset [\gamma_m, \gamma_M]$ yra toks pat visiems ξ. 3 atv. visiems $\gamma \neq 0$ ir $\xi < 1$ gali egzistuoti kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės, ir tik, kai $\xi = 1$ visos tikrinės reikšmės yra realiosios.

3 skyrius

Kraštinių uždavinių su įvairiomis nelokaliosiomis sąlygomis teigiamos tikrinės funkcijos

3.1. Kraštinių uždavinių teigiamos tikrinės funkcijos

Šiame skyriuje analizuosime Šturmo ir Liuvilio uždavinio teigiamas tikrines funkcijas. Gautus rezultatus palyginsime su G. Infante [54] straipsnyje nagrinėtomis teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalais.

Savijungių ir nesavijungių Šturmo ir Liuvilio uždavinių tikrines reikšmes ir jas atitinkančias tikrines funkcijas kompleksinėje ir realiojoje plokštumoje nagrinėjo Q. Kong, H. Wu, A. Zettl [68]. Tokio tipo uždavinio, tik su pastoviais koeficientais diferencialinėje lygtyje ir nesavijungėmis kraštinėmis sąlygomis, tikrinių reikšmių ir tikrinių funkcijų pasiskirstymą tyrė R. J. Villanueva, L. Jodar [107]. Netolydų Šturmo ir Liuvilio uždavinį, kai ir lygtis ir kraštinės sąlygos priklauso nuo tikrinio parametro λ nagrinėjo O. Sh. Muhtarov, M. Kadakal ir F. S. Muhtarov [82]. Jie išvedė asimptotinio aproksimavimo formulę tikrinių reikšmių ir sunormuotų tikrinių funkcijų pasiskirstymui.

Tokio tipo uždavinius, taip pat tiria G. Infante. Straipsnyje [54] G. Infante nagrinėja Hameršteino lygties

$$\tilde{\lambda}u(t) = \int_G k(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \tag{1.1}$$

tikrines reikšmes. Čia G yra kompaktiška aibė $\mathbb{R}^n$, k ir f gali būti netolydžios funkcijos, ir k gali keisti ženklą. Minėtame ttraipsnyje G. Infante tiria bendresnes lygtis, kurios gali neturėti teigiamų sprendinių, tačiau jis gali rasti netrivialių sprendinių egzistavimo sritis. G. Infante padaro prielaidas, kad funkcijai f, branduoliui k ir duotajam $r > 0$ teisingos šios sąlygos:

1) $f : G \times [-r,r] \to [0,\infty)$ tenkina Caratheodory sąlygas $G \times [-r,r]$, ir egzistuoja mačioji funkcija $g_r : G \to [0,\infty)$ tokia, kad $f(t,u) \leq g_r(t)$ beveik visiems $u \in [-r,r]$;

2) $k : G \times G \to \mathbb{R}$ yra mačioji, ir visiems $\tau \in G$
$\lim\limits_{t\to\tau} \int_G |k(t,s) - k(\tau,s)| g_r(s)\mathrm{d}s = 0$;

3) Egzistuoja uždaras teigiamo mato poaibis $G_0 \subset G$, mačioji funkcija $\varPhi : G \to [0,\infty)$ ir konstanta $c \in (0,1]$ tokia, kad:

$$|k(t,s)| \leq \varPhi(s), \text{kai } t \in G \text{ ir beveik visiems } s \in G,$$
$$c\varPhi(s) \leq k(t,s), \text{kai } t \in G_0 \text{ ir beveik visiems } s \in G;$$

4) Egzistuoja $M_r < \infty$ tokia, kad $\int_G \varPhi(s) g_r(s)\mathrm{d}s \leq M_r$.

Pasinaudojus šiomis prielaidomis G. Infante nagrinėjama sritis yra kūgis $K = \{u \in C(G) : \min\{u(t) : t \in G_0\} \geq c \parallel u \parallel\}$. Funkcija priklausanti sričiai K yra teigiama poaibyje G_0, tačiau gali keisti ženklą aibėje G. Šio tipo kūgis buvo pradėtas nagrinėti [56], ir jis yra didesnis negu naudotas K. Q. Lan [70, 71].

Gauti rezultatai taikomi antros eilės diferencialinei lygčiai

$$\tilde{\lambda} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad (0 < t < 1), \tag{1.2}$$

su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u'(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{1.3$_1$}$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u'(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{1.3$_2$}$$
$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{1.3$_3$}$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \tag{1.3$_4$}$$

G. Infante [54], remdamasis rezultatais, gautais Hameršteino lygčiai, nustato, kada šie uždaviniai turi teigiamas tikrines reikšmes, ir randa jas atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis. Jis parodo, kad egzistuoja tokia teigiama (arba neigiama) $\tilde{\lambda}$, kad (1.2) lygtis turi nenulinį sprendinį. Uždavinio (1.2) tikrine reikšme G. Infante laiko Hameršteino integralinės lygties (1.1) tikrinę reikšmę.

Straipsnyje [54] G. Infante pateikė keturias teoremas:

3.1.1 teorema. *Tegul* $\gamma < 0, [a,b] \subset [0,1), c = \min\left\{1, -\gamma, \frac{1-b}{1-\xi}\right\}/\left(1 - \frac{\gamma}{1-\xi}\right)$ *ir tarkime, kad egzistuoja* $\rho \in (0,r]$*, toks, jog egzistuoja mačioji funkcija* $m_\rho : [a,b] \to \mathbb{R}_+$*, tokia, kad:*

1) $f(s,u) \geq m_\rho(s)$ *visiems* $u \in [c\rho, \rho]$ *ir beveik visiems* $s \in [a,b]$*;*

2) $\sup\limits_{t\in[a,b]} \int_a^b k(t,s) m_\rho(s)\mathrm{d}s > 0.$

Tada (1.2)–(1.3_1) *kraštinis uždavinys turi teigiamą tikrinę reikšmę ir ją atitinkančią tikrinę funkciją, kuri yra teigiama* $[a, b]$.

3.1.2 teorema. *Tegul* $0 < \gamma < 1 - \xi, [a, b] \subset [0, \xi], c = 1 - \xi - \gamma$ *ir tarkime, kad egzistuoja toks* $\rho \in (0, r]$, *jog egzistuoja mačioji funkcija* $m_\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *tokia, kad:*

1) $f(s, u) \geq m_\rho(s)$ *visiems* $u \in [c\rho, \rho]$ *ir beveik visiems* $s \in [a, b]$*;*
2) $\sup\limits_{t \in [a,b]} \int_a^b k(t, s) m_\rho(s) \mathrm{d}s > 0.$

Tada (1.2)–(1.3_1) *kraštinis uždavinys turi teigiamą tikrinę reikšmę ir ją atitinkančią tikrinę funkciją, kuri yra teigiama* $[a, b]$.

Kraštiniam uždaviniui (1.2)–(1.3_2), kai $\gamma < 0$, $[a, b] \subset (0, \xi]$ ir $c = \min\{a, -\gamma\}/\max\{1 - \xi - \gamma, -\frac{\gamma}{\xi}\}$ yra teisinga 3.1.1 teorema, o kai $0 < \gamma < 1 - \xi$, $[a, b] \subset (0, 1 - \gamma)$ ir $c = \min\{a(1 - \xi - \gamma, 1 - b - \gamma)\}/\max\{1, \frac{\gamma}{\xi}\}$ uždaviniui (1.2)–(1.3_2) teisinga 3.1.2 teorema.

3.1.3 teorema. *Tegul* $\gamma < 0, [a, b] \subset [0, \xi], c = (1 - \xi)/(1 - \gamma)$ *ir tarkime, kad egzistuoja* $\rho \in (0, r]$, *toks, jog egzistuoja mačioji funkcija* $m_\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, *tokia, kad:*

1) $f(s, u) \geq m_\rho(s)$ *visiems* $u \in [c\rho, \rho]$ *ir beveik visiems* $s \in [a, b]$*;*
2) $\sup\limits_{t \in [a,b]} \int_a^b k(t, s) m_\rho(s) \mathrm{d}s > 0.$

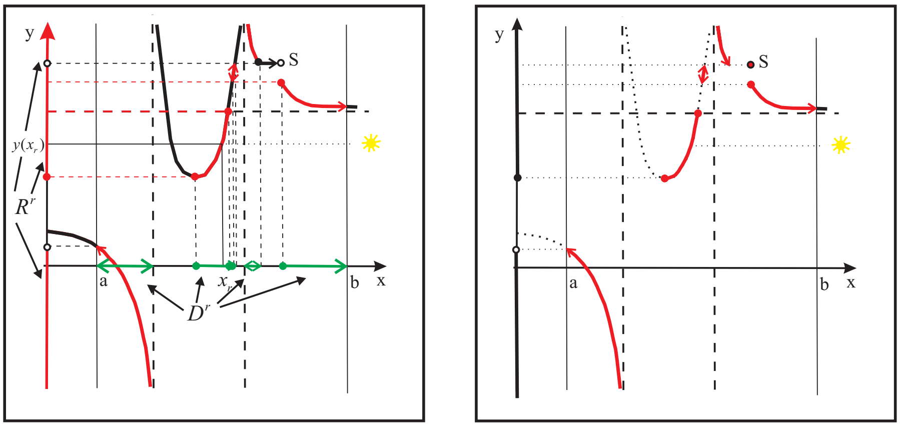
Tada (1.2)–(1.3_3) *kraštinis uždavinys turi teigiamą tikrinę reikšmę ir ją atitinkančią tikrinę funkciją, kuri yra teigiama* $[a, b]$.

Kai $0 < \gamma < 1$, $[a, b] \subset [0, 1]$ ir $c = \gamma(1 - \xi)$ uždaviniui (1.2)–(1.3_3) teisinga 3.1.3 teorema.

3.1.4 teorema. *Tegul* $\gamma > 1, a = \xi, b \in (\xi, 1], c = (1 - \xi)/\gamma$ *ir tarkime, kad egzistuoja* $\rho \in (0, r]$ *toks, jog egzistuoja mačioji funkcija* $m_\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, *tokia, kad:*

1) $f(s, u) \geq m_\rho(s)$ *visiems* $u \in [c\rho, \rho]$ *ir beveik visiems* $s \in [a, b]$*;*
2) $\sup\limits_{t \in [a,b]} \int_a^b -k(t, s) m_\rho(s) \mathrm{d}s > 0.$

Tada (1.2)–(1.3_3) *kraštinis uždavinys turi neigiamą tikrinę reikšmę ir ją atitinkančią tikrinę funkciją, kuri yra neigiama* $[a, b]$.



3.1 pav. Funkcijos $x^r(y)$ ir $y^r(x)$ intervale $I = (a, b)$

Kraštiniam uždaviniui (1.2)–(1.3$_4$) yra teisinga 3.1.3 teorema, kai $\gamma\xi < 0$, $[a, b] \subset (0, \xi]$ ir $c = \min\{a, 1-\xi\}/(1-\gamma)$. Taip pat 3.1.3 teorema šiam uždaviniui yra teisinga, kai $0 < \gamma\xi < 1$, $[a, b] \subset (0, 1]$ ir $c = \min\{a, \gamma\xi, 4a(1-\xi), \gamma(1-\xi)\}$, kai $\gamma < 1$, $c = \min\{a\xi, 4a(1-\gamma\xi)\xi, \xi(1-\gamma\xi)\}$, kai $\gamma \geq 1$. O kai $\gamma\xi > 1$, $[a, b] \subset [\xi, 1]$ ir $c = \min\{a, 1-\xi\}/\gamma$, tai (1.2)–(1.3$_4$) uždaviniui yra teisinga 3.1.4 teorema.

3.1.1 *pastaba.* Siekiant didesnio aiškumo, G. Infante [54] straipsnyje naudojami žymėjimai buvo suvienodinti su šioje disertacijoje esančiais žymėjimais: $\alpha = \gamma, \eta = \xi$.

3.2. Žymenys ir papildomos sąvokos

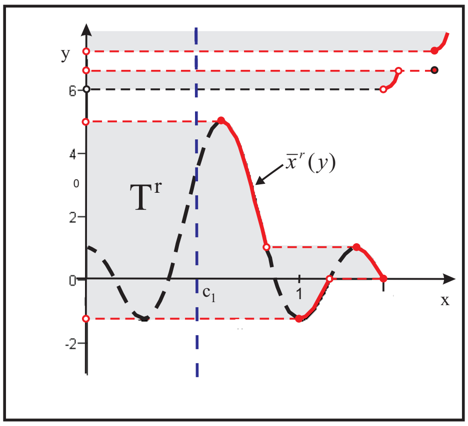
Įvesime keletą apibrėžimų, kurie bus naudojami šiame skyriuje. Pirmiausia apibrėšime *matomą iš dešinės* funkcijos *tašką*. Panašus apibrėžimas sutinkamas A. N. Kolmogorov ir S. V. Fomin monografijoje [67], tik ten naudojamas nematomas iš dešinės taškas.

Sakykime, realiosios funkcijos, apibrėžtos intervale $I = [a, b]$ $\big((a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]\big)$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, reikšmių sritis yra aibė $\bar{R}^r \subset \mathbb{R}$.

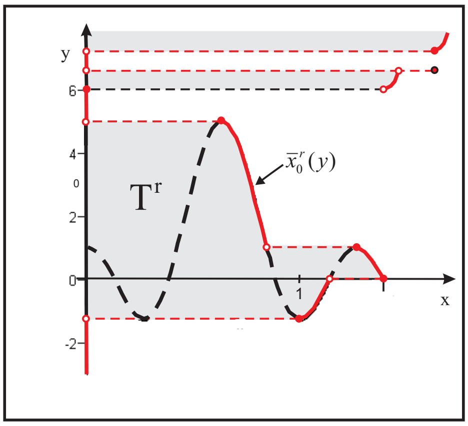
3.2.1 APIBRĖŽIMAS. Tegul realioji funkcija $y = y(x)$ yra apibrėžta intervale I. Funkcijos y grafiko tašką $(x_r, y(x_r))$ vadinsime *matomu iš dešinės* funkcijos $y = y(x)$ *tašku*, jeigu $y(x_r) \neq y(x)$ visiems $x \in (x^r, b] \cap I$.

Toliau dažniausiai naudosime intervalą $I = (0, +\infty)$ (3.1 paveikslas).

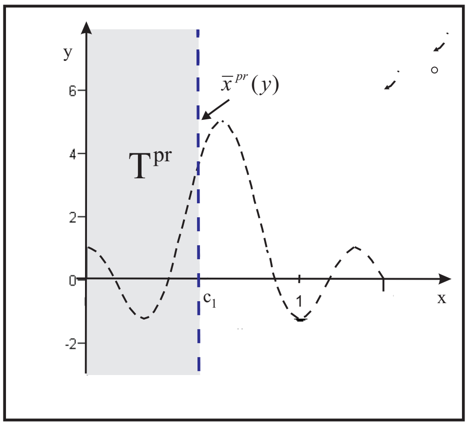
Ne visiems $y \in \bar{R}^r$ galime surasti matomą iš dešinės tašką (konstanta, apibrėžta intervale (a, b)). Reikšmių aibės $\bar{R}^r$ poaibį, kurį sudaro taškai, kuriems egzistuoja matomi iš dešinės taškai, žymėsime R^r. Kiekvienam $y \in R^r$ galime



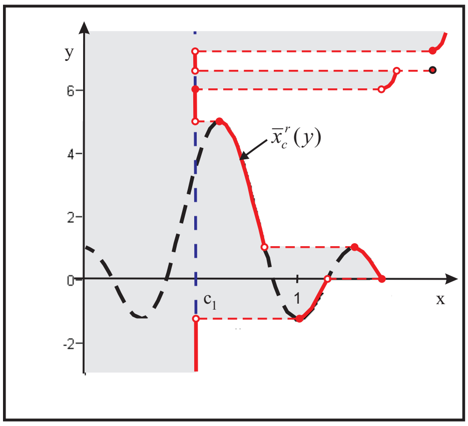
3.2 pav. Sritis T^r ir funkcija $\bar{x}^r(y)$



3.3 pav. Sritis T_0^r ir funkcija $\bar{x}_0^r(y)$



3.4 pav. Sritis T^{pr} ir f-ja $\bar{x}^{pr}(y) \equiv c_1$



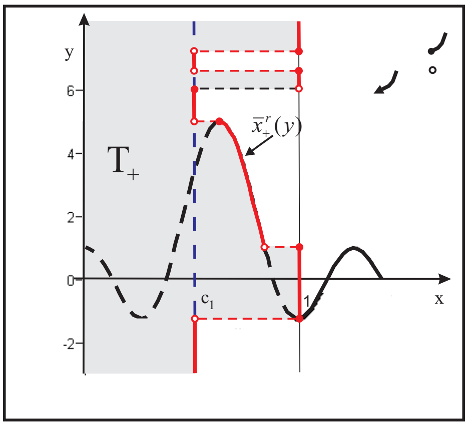
3.5 pav. Sritis $T^r \cup T^{pr}$ ir f-ja $\bar{x}_c^r(y)$

priskirti vienintelį *matomą iš dešinės tašką* $x_r(y)$, t.y. galime apibrėžti vienareikšmę funkciją $x^r : R^r \to I$. Šios funkcijos grafikas yra funkcijos $y = y(x)$ grafiko poaibis. Funkcijos $x = x^r(y)$ reikšmių aibė $D^r \subset I$.

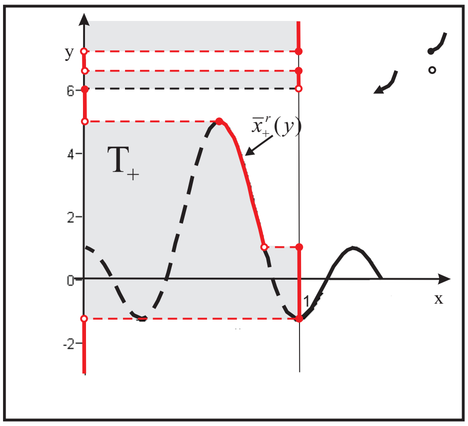
Funkcijos $y = y(x)$ siaurinys aibėje D^r apibrėžia *matomą iš dešinės* funkcijos $y = y(x)$ grafiko dalį. Šį siaurinį vadinsime *matoma iš dešinės funkcija* ir žymėsime $y = y^r(x)$ (3.1 paveikslas, raudona linija).

Funkcijos $x^r(y)$ ir $y^r(x)$ gali būti trūkios. Šios funkcijos yra viena kitai atvirkštinės funkcijos, apibrėžiančios bijekciją tarp aibių D^r ir R^r (3.1 paveikslas).

Taškui $y \in \bar{R}^r \setminus R^r$ nėra matomo iš dešinės taško, nes funkcijos $y(x)$ y-reikšmė intervale (a, b) įgyjama be galo daug kartų. Šiuo atveju $\bar{y} \in \bar{R}^r \setminus R^r$ priskirsime reikšmę $\bar{x}_r(\bar{y}) = \sup_{x \in I}\{x | y(x) = \bar{y}\}$, jei $\bar{y} \in R^r$, $\bar{x}_r(\bar{y}) := x_r(\bar{y})$. Funkcijos $\bar{x}_r$ apibrėžimo sritis yra aibė $\bar{R}^r$, ją irgi vadinsime *matoma iš dešinės funkcija*.



3.6 pav. Sritis T_+ ir funkcija $\bar{x}^r_+(y)$



3.7 pav. Sritis T_+ ir funkcija $\bar{x}^r_+(y)$

Pastebėsime, kad matomos iš dešinės funkcijos $y^r(x)$ grafikas yra matomos iš dešinės funkcijos $\bar{x}^r(y)$ poaibis (3.1 paveikslas, raudonas su juodu kontūru taškas S priklauso funkcijos $\bar{x}^r(y)$ grafikui, bet nepriklauso funkcijos $y^r(x)$ grafikui).

Tikrinės reikšmės šioje disertacijoje yra randamos dviem būdais: kaip charakteristinės funkcijos $\gamma(x)$ γ-reikšmės ir kaip pastoviosios tikrinės reikšmės. Paprastai egzistuoja be galo daug pastoviųjų tikrinių reikšmių, tačiau šiame skyriuje visur reikalinga tik pirmoji pastovioji tikrinė reikšmė (žymėsime c_1, laikysime, kad $c_1 > 0$), nes ji garantuoja didesnę teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį negu kitos pastoviosios tikrinės reikšmės. Pastovioji tikrinė reikšmė apibrėžia tik funkciją $x = \bar{x}^{pr}(y) \equiv c_1, y \in \mathbb{R}$ (3.4 paveikslas)

Plokštumoje $\mathbb{R}^2_{x,y}$ apibrėžkime sritis:

$$T^r := \{(x,y)|y \in R^r, x \in I, x < \bar{x}^r(y)\}, \text{ (3.2 pav., nematoma iš dešinės sritis)},$$
$$T^{pr} := \{(x,y)|x \in I, x < c_1\}, \quad \text{(3.4 pav., pastoviosios reikšmės šešėlinė sritis)},$$
$$T^1 := \{(x,y)|x \in (0,1)\}.$$

Sritis T^{pr} gali būti tuščia aibė, tačiau kai kuriais atvejais ji papildo sritį T^r. Sritis $T_c = T^r \cup T^{pr}$ pavaizduota 3.5 paveiksle. Iš šių trijų aibių T^r, T^{pr} ir T^1 derinio sudarome šešėlinę sritį T_+:

$$T_+ := (T^r \cup T^{pr}) \cap T^1,$$

3.5 paveikslas, ir ją ribojančias iš viršaus funkcijas:

$$\bar{x}^r_0(y) := \begin{cases} \bar{x}^r(y)), & \text{kai } y \in \bar{R}^r, \\ 0, & \text{kai } y \notin \bar{R}^r, \end{cases}$$
$$\bar{x}^r_c(y) := \max\{c_1, \bar{x}^r_0(y)\},$$
$$\bar{x}^r_+(y) := \min\{1, \bar{x}^r_c(y)\}.$$

Jeigu nėra pastoviosios tikrinės reikšmės, tai $\bar{x}_c^r \equiv \bar{x}_0^r(y)$ (3.6 paveikslas).

3.2.1 *pastaba.* T - žymėsime G. Infante gautą teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį.

3.2.2 *pastaba.* Spausdintame disertacijos variante sritis T_+ žymima šviesiai pilka spalva, sritis T – tamsiai pilka spalva. Matoma iš dešinės funkcija riboja šviesiai pilką sritį T_+ iš dešinės pusės.

3.3. Šturmo ir Liuvilio uždavinio su nelokaliosiomis dvitaškėmis kraštinėmis sąlygomis teigiamos tikrinės funkcijos

Nagrinėkime Šturmo ir Liuvilio uždavinį su viena klasikine kraštine sąlyga

$$-u''(t) = \lambda u(t), \qquad t \in (0,1), \tag{3.4}$$
$$u(0) = 0, \tag{3.5}$$

o kita nelokaliąja dvitaške Samarskio – Bitsadzės tipo kraštine sąlyga:

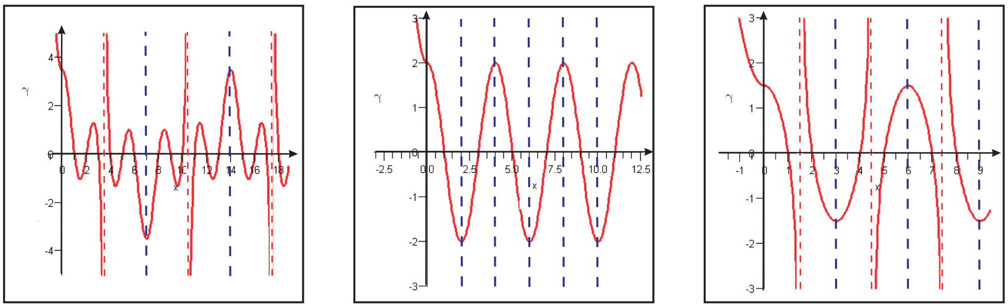
$$u'(1) = \gamma u(\xi); \qquad \text{(1 atv.)} \qquad (3.6_1)$$
$$u'(1) = \gamma u'(\xi); \qquad \text{(2 atv.)} \qquad (3.6_2)$$
$$u(1) = \gamma u'(\xi); \qquad \text{(3 atv.)} \qquad (3.6_3)$$
$$u(1) = \gamma u(\xi); \qquad \text{(4 atv.)} \qquad (3.6_4)$$

su parametrais $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in (0,1)$. Tirsime šio uždavinio teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalus.

3.3.1 *pastaba.* Šiame uždavinyje pirmoji kraštinė sąlyga yra vienataškė, o antroji – dvitaškė. Todėl (3.4)–(3.6) uždavinį vadinsime uždaviniu su nelokaliąja dvitaške kraštine sąlyga. Kai $\xi = 1$, antroji kraštinė sąlyga išsigimsta į sąlyga viename taške. G. Infante ir kai kurie kiti autoriai (3.4)–(4.15) uždavinį vadina uždaviniu su tritaškėmis kraštinėmis sąlygomis.

Šiame disertacijos skyriuje nagrinėjami (3.4)–(3.6) uždaviniai yra atskiri (1.2)–(1.3) uždavinių atvejai: $\lambda = 1/\tilde{\lambda}$ ir $f(t,s) \equiv s$. Mes (3.4)–(3.6) uždavinius nagrinėsime klasikinėje erdvėje. Kadangi (3.4) lygtis su pastoviais koeficientais, tai sprendiniai bus randami analizinių funkcijų klasėje.

G. Infante nagrinėjamų (1.2), (1.3_2) ir (1.2), (1.3_4) uždavinių kraštinės sąlygos sutampa su (3.4)–(3.5), (3.6_3) ir (3.4)–(3.5), (3.6_4) uždavinių kraštinėmis sąlygomis atitinkamai. Todėl, šiais atvejais gautas teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis palyginsime su [54] straipsnyje nagrinėtomis sritimis.



a) $\xi = \frac{2}{7}$ b) $\xi = \frac{1}{2}$ c) $\xi = \frac{2}{3}$

3.8 pav. Funkcijos $\gamma_{4+}(x\pi)$ grafikai

Kai $\gamma = 0$, tai klasikinės tikrinės reikšmės ir klasikinės tikrinės funkcijos nepriklauso nuo parametro ξ (2 skyriaus 1 poskyris):

$$\lambda_k = \pi^2\big(k - \tfrac{1}{2}\big)^2, \qquad u_k(t) = \sin\big(\pi(k - \tfrac{1}{2})t\big), \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad (3.7_{1,2})$$

$$\lambda_k = (\pi k)^2, \qquad u_k(t) = \sin(\pi k t), \qquad k \in \mathbb{N}. \qquad (3.7_{3,4})$$

Bendruoju atveju, kai $\lambda \neq 0$, tikrinės funkcijos yra $u(x) = \sin(qx)$ ir tikrinės reikšmės $\lambda = q^2$, čia $q \in \mathbb{C}_q \setminus \{0\}$.

Toliau šiame skyriuje tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas nagrinėsime tik realiąsias $q = x$, $x \in \mathbb{R}_+$ arba $q = -ix$, $x \in \mathbb{R}_-$. Visos tikrinės funkcijos yra proporcingos $\sin(xt)$ arba $\mathrm{sh}\,(xt)$.

Visas nepastoviąsias tikrines reikšmes (kurios priklauso nuo parametro γ) galime gauti kaip šių charakteristinių funkcijų γ-reikšmių taškus (2 skyriaus, 2 poskyris):

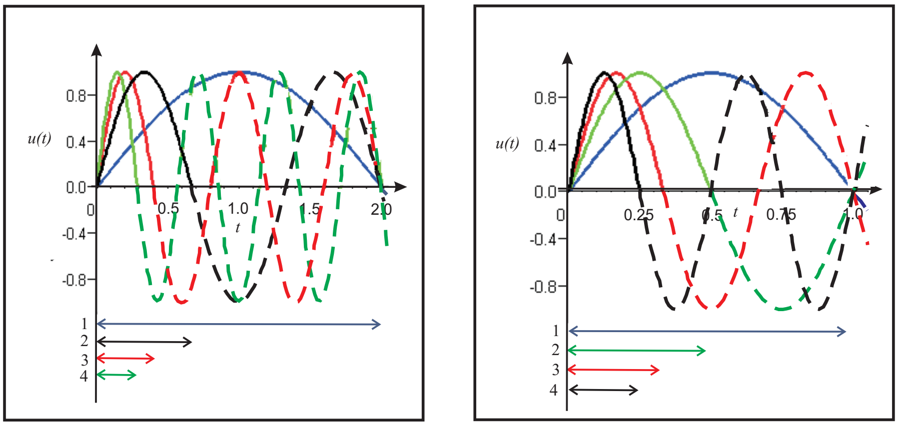
$$\gamma_{1+}(x;\xi) = \frac{x\cos x}{\sin(\xi x)}, \qquad (3.8_1)$$

$$\gamma_{2+}(x;\xi) = \frac{\cos x}{\cos(\xi x)}, \qquad (3.8_2)$$

$$\gamma_{3+}(x;\xi) = \frac{\sin x}{x\cos(\xi x)}, \qquad (3.8_3)$$

$$\gamma_{4+}(x;\xi) = \frac{\sin x}{\sin(\xi x)}. \qquad (3.8_4)$$

Funkcijų $\gamma_{l+}(x\pi), l = 1,2,3$ grafikai įvairioms parametro ξ reikšmėms yra pateikti disertacijos 2 skyriuje 1 poskyryje 2 paveiksle, o šiame skyriuje 3.8 paveiksle pateikiami funkcijų $\gamma_{4+}(x\pi)$ grafikai. Šiuose grafikuose funkcijos $\gamma_{l+}(x\pi)$, $l = 1,2,3,4$ pavaizduotos, kai $x \in \mathbb{R}$.



a) $u_k^1(t\pi), k = 1, 2, 3, 4$ b) $u_k^3(t\pi), k = 1, 2, 3, 4$

3.9 pav. Klasikinių tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai

Tikrines reikšmes, kaip ir ankstesniuose skyriuose, numeruosime panaudodami klasikinį atveji, t.y. $x_k(0) = \pi(k - \frac{1}{2}), k \in \mathbb{N}$, (1, 2 atv.) ir $x_k(0) = \pi k, k \in \mathbb{N}$, (3, 4 atv.). Jas atitinkančios tikrinės funkcijos $u_k^l(t) = \sin\left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right), k \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2$, (1, 2 atv.) ir $u_k^l(t) = \sin(\pi k t), k \in \mathbb{N}, l = 3, 4$, (3, 4 atv.) yra teigiamos intervaluose $t \in \left(0, \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ (1, 2 atv.) ir $t \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ (3, 4 atv.). Šios funkcijos yra teigiamos intervale $(0, 2\pi)$ (1, 2 atv.) ir intervale $(0, \pi)$ (3, 4 atv.). Kai didėja tikrinės reikšmės eilės numeris, tai trumpėja teigiamos tikrinės funkcijos pirmasis teigiamumo intervalas (3.9 paveikslas).

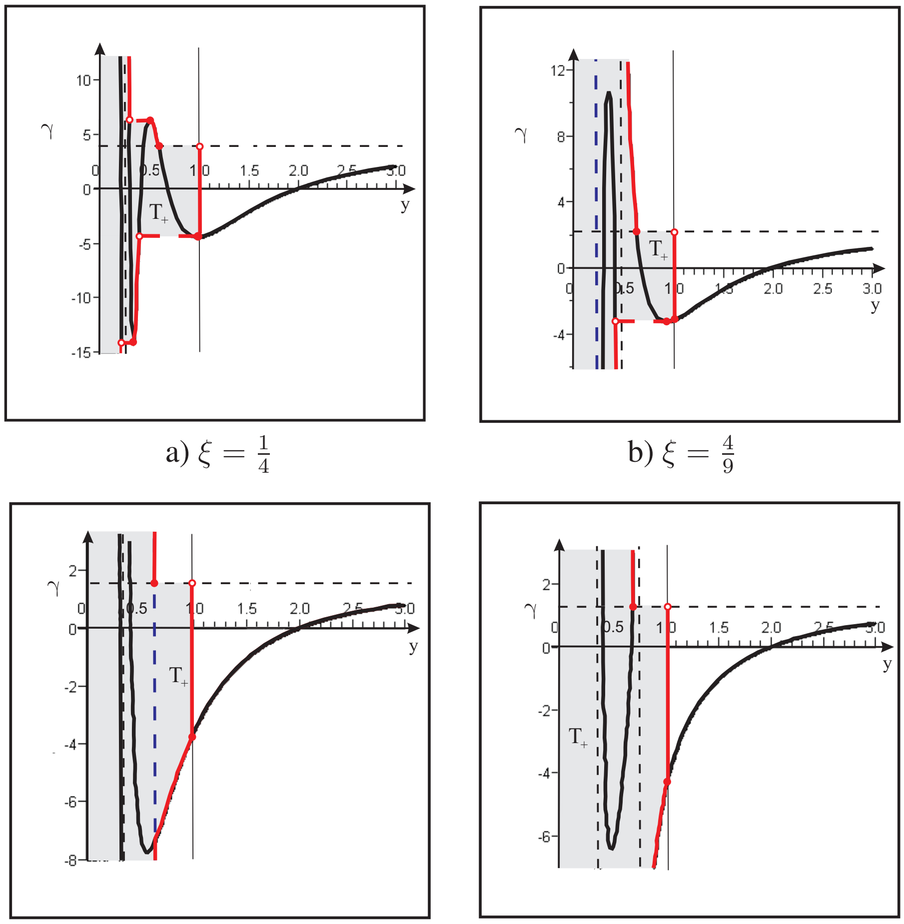
Kadangi tikrinės funkcijos bendruoju atveju yra $u(t) = \sin(xt)$, o funkcija $\sin(xt)$ yra teigiama, kai $xt \in (0, \pi)$. Čia x reikšmes galime surasti iš lygties $\gamma(x) = \gamma$. Tada dešiniajame intervalo gale $t_+ x = \pi$, iš čia $x = \frac{\pi}{t_+}$ (t_+ galime gauti išsprendę lygtį $\gamma\left(\frac{\pi}{t_+}\right) = \gamma$). Toliau žymėsime $t_+ = y$. Vadinasi, visas nepastoviąsias tikrines reikšmes atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalus galime gauti (3.8) formulėje padarę transformaciją $x = \frac{\pi}{y}$

$$\hat{\gamma}_{1+}(y;\xi) = \frac{\frac{\pi}{y}\cos\frac{\pi}{y}}{\sin(\xi\frac{\pi}{y})}, \tag{3.9$_1$}$$

$$\hat{\gamma}_{2+}(y;\xi) = \frac{\cos\frac{\pi}{y}}{\cos(\xi\frac{\pi}{y})}, \tag{3.9$_2$}$$

$$\hat{\gamma}_{3+}(y;\xi) = \frac{\sin\frac{\pi}{y}}{\frac{\pi}{y}\cos(\xi\frac{\pi}{y})}, \tag{3.9$_3$}$$

$$\hat{\gamma}_{4+}(y;\xi) = \frac{\sin\frac{\pi}{y}}{\sin(\xi\frac{\pi}{y})}. \tag{3.9$_4$}$$



a) $\xi = \frac{1}{4}$ b) $\xi = \frac{4}{9}$

c) $\xi = \frac{2}{3}$ d) $\xi = \frac{3}{4}$

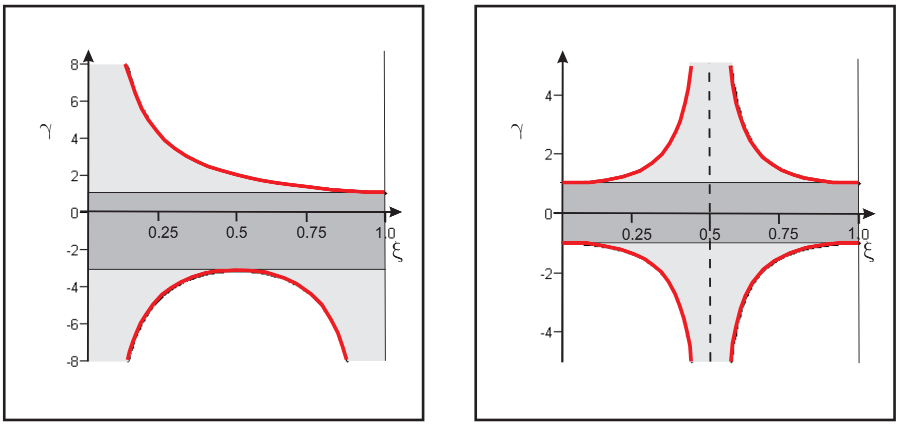
3.10 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 1 atv.

Funkcijų $\hat{\gamma}_{l+}(y;\xi), l = 1,2,3,4$ grafikai visais keturiais nelokaliųjų kraštinių sąlygų atvejais, įvairioms parametro ξ reikšmėms pateikti 3.10, 3.12, 3.13 ir 3.15 paveiksluose.

Šiuose ir kituose paveiksluose, siekiant didesnio aiškumo, dalis funkcijos $\hat{\gamma}_{l+}(y;\xi), l = 1,2,3,4$ grafiko nulio aplinkoje yra uždengta.

3.3.2 *pastaba.* Funkcija $\hat{\gamma}_{l+}(y;\xi), l = 1,2,3,4$ generuoja matomą iš dešinės funkciją $\bar{x}^r_+(y)$, kuri apibrėžia sritį T_+ (3 skyriaus 2 poskyris). Srityje T_+, garantuojame, kad egzistuoja bent viena teigiama tikrinė funkcija intervale $(0, \bar{x}^r_+(\gamma;\xi))$.

Toliau kiekvienu nelokaliųjų kraštinių sąlygų atveju aprašysime teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalus.



a) 1 atvejis b) 2 atvejis

3.11 pav. Tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai visiems γ ir ξ

Nagrinėjant (3.4)–(3.6$_1$) Šturmo ir Liuvilio uždavinį teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį T_+ visiems $\xi \in (0,1)$ galima apibrėžti panaudojant funkciją $\bar{x}^r_+(\gamma;\xi)$ (3.2.1 apibrėžimas ir 3.10 paveikslas):

$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}^r_+(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < \gamma_1^*(\xi) \text{ ir } \frac{1}{\xi} \le \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } \gamma_1^*(\xi) \le \gamma < \frac{1}{\xi}, \end{cases}$$

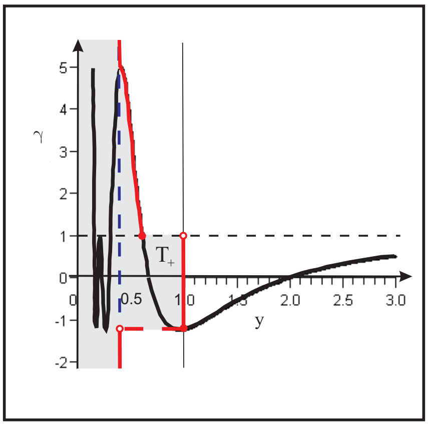
čia $\gamma_1^*(\xi) = \hat{\gamma}_{1+}(1;\xi) = -\frac{\pi}{\sin(\xi\pi)}$.

Norint nustatyti, kokioms parametrų γ ir ξ reikšmėms egzistuoja teigiamos intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos, patogu nubraižyti funkcijų $\bar{\gamma}_1(\xi) = \frac{1}{\xi}$ ir $\gamma_1^*(\xi)$ grafikus (3.11 paveikslas, a)). Iš 3.11 paveikslo, a) grafiko (šviesiai pilka sritis) matyti, kad, kai $\gamma < -\pi$, teigiamos visame intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos egzistuoja, kai $\xi \in (0,\xi_1')$ ir $\xi \in (\xi_1'',1)$, o kai $\gamma > 1$, tokios funkcijos egzistuoja, kai $\xi \in (0,\xi_1^*)$.

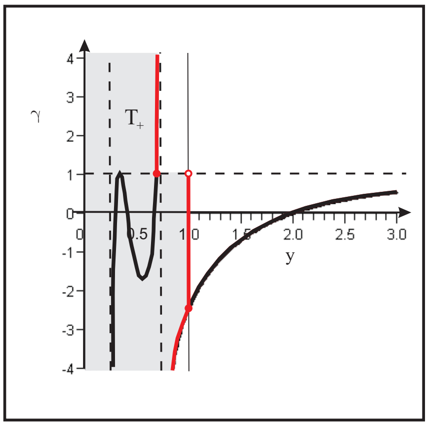
3.3.1 *išvada.* Kai $\gamma \in [-\pi,1]$, kiekvienam $\xi \in (0,1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos (3.11 paveikslas, a), tamsiai pilka sritis).

Uždavinyje (3.4)–(3.5), (3.6$_2$) teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis T_+ yra apibrėžiama skirtingai, kai $\xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ (3.12 paveikslas, a), b))

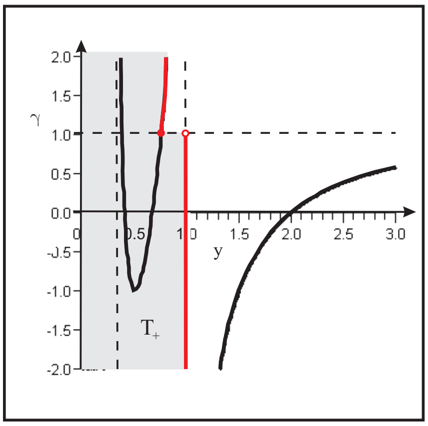
$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}^r_+(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < \gamma_2^*(\xi) \text{ ir } 1 \le \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } \gamma_2^*(\xi) \le \gamma < 1, \end{cases}$$



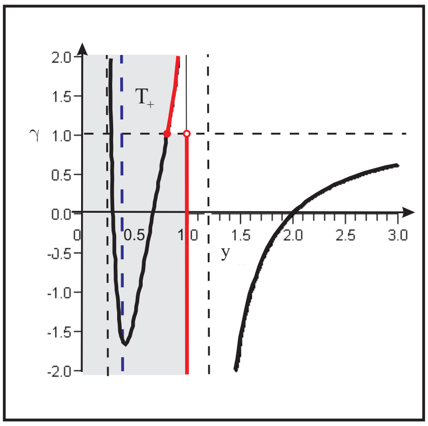
a) $\xi = \frac{1}{5}$



b) $\xi = \frac{4}{11}$



c) $\xi = \frac{1}{2}$



d) $\xi = \frac{3}{5}$

3.12 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 2 atv.

kai $\xi = \frac{1}{2}$ (3.12 paveikslas, c)

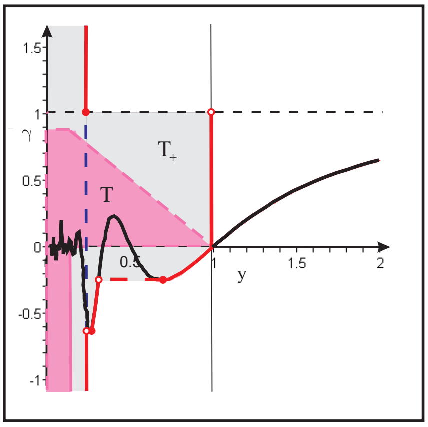
$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < 1, & \text{kai } -\infty < \gamma < 1 \text{ ir } \gamma_2^*(\xi) \leq \gamma < +\infty, \\ 0 < y < \bar{x}_+^r(\gamma; \xi), & \text{kai } 1 \leq \gamma < \gamma_2^*(\xi). \end{cases}$$

ir kai $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (3.12 paveikslas, d)

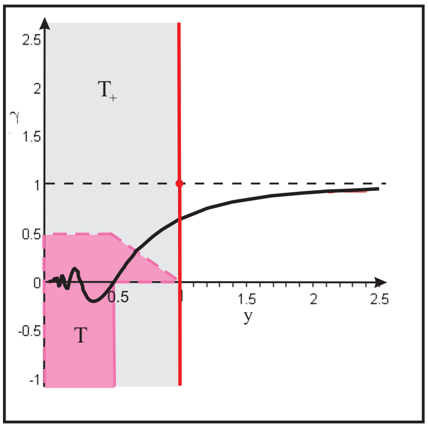
$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < 1, & \text{kai } -\infty < \gamma < 1 \text{ ir } \gamma_2^*(\xi) \leq \gamma < +\infty, \\ 0 < y < \bar{x}_+^r(\gamma; \xi), & \text{kai } 1 \leq \gamma < \gamma_2^*(\xi), \end{cases}$$

čia $\gamma_2^*(\xi) = \hat{\gamma}_{2+}(1; \xi) = -\frac{1}{\cos(\xi\pi)}$, kai $\xi = \frac{1}{2}$, tai $\gamma_2^*(\xi) = -\infty$.

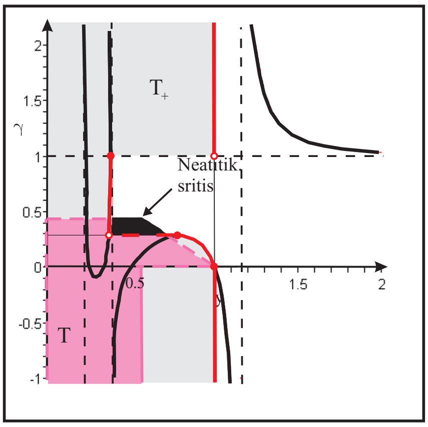
Šiuo atveju norint nustatyti parametrų γ ir ξ reikšmes, su kuriomis egzistuoja teigiamos visame intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos, patogu braižyti $\bar{\gamma}_2 = 1$ ir



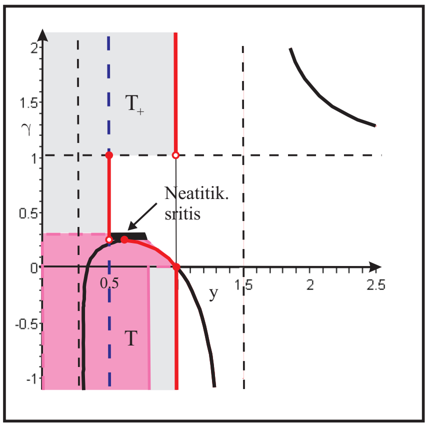
a) $\xi = \frac{1}{8}$



b) $\xi = \frac{1}{2}$



c) $\xi = \frac{\sqrt{3}}{3}$



d) $\xi = \frac{3}{4}$

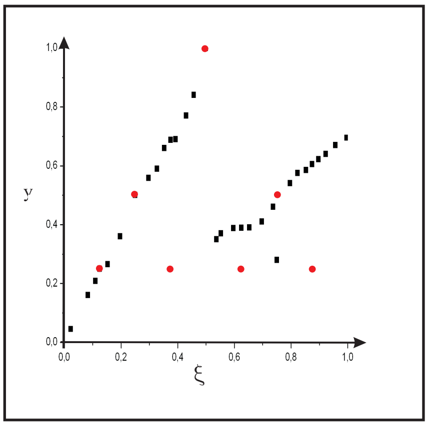
3.13 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 3 atv.

$\gamma_2^*(\xi)$ grafikus (3.11 paveikslas, b)). Skirtingai negu ankstesniame atvejyje, kai $\gamma < -1$ ir $\gamma > 1$, teigiamos visame intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos egzistuoja, kai $\xi \in (\xi_2', \xi_2'')$ (3.11 paveikslas, b), šviesiai pilka sritis).

3.3.2 *išvada.* Kai $\gamma \in [-1,1]$, kiekvienam $\xi \in (0,1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos (3.11 paveikslas, b), tamsiai pilka sritis).

Uždavinyje (3.4)–(3.5), (3.6$_3$) sritis T_+ yra apibrėžiama skirtingai, kai $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (3.13 paveikslas, a), pilka sritis)

$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}_+^r(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < 0 \text{ ir } 1 \le \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } 0 \le \gamma < 1, \end{cases}$$



3.14 pav. Tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai visiems γ 3 atv.

kai $\xi = \frac{1}{2}$, tai $T_+ = \{0 < y < 1, \text{kai}\ \gamma \in \mathbb{R}\}$ (3.13 paveikslas, b), pilka sritis), ir kai $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (3.13 paveikslas, c), d), pilka sritis)

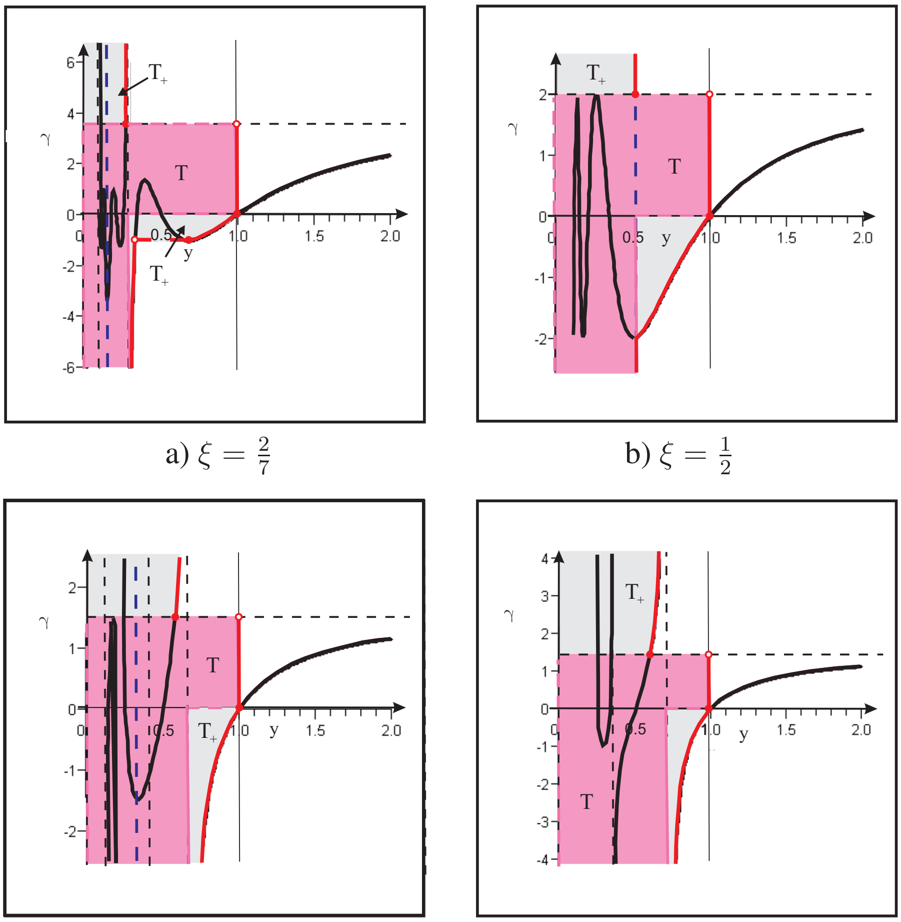
$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < 1, & \text{kai } -\infty < \gamma \le 0 \text{ ir } 1 < \gamma < +\infty, \\ 0 < y < \bar{x}_+^r(\gamma;\xi), & \text{kai } 0 < \gamma \le 1. \end{cases}$$

Kadangi G. Infante irgi nagrinėjo uždavinį, kurio kraštinės sąlygos sutampa su 3 atv. kraštinėmis sąlygomis, tai jo gautą teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį galime palyginti su aukščiau aprašyta sritimi. Kai $0 < \xi \le \frac{1}{2}$, visiems $-\infty < \gamma < 1 - \xi$, sritis T_+ yra didesnė už sritį T. Srities, kai $\gamma \ge 1 - \xi$, G. Infante savo straipsnyje [54] nenagrinėja. Kai $\frac{1}{2} < \xi < 1$, situacija yra sudėtingesnė. Kai $\gamma^*(\xi) < \gamma < 1-\xi$, gaunama *neatitikimo sritis* (3.13 paveikslas, a), b), juoda sritis), tai yra, G. Infante savo uždaviniui (1.2), (1.3_2) teigia, kad šioje srityje egzistuoja teigiama tikrinė funkcija, tačiau (3.4)–(3.5), (3.6_3) uždavinys šioje srityje teigiamų tikrinių funkcijų neturi, nes $\bar{x}_+^r(\gamma;\xi) < 1 - \xi$.

Šiuo kraštinių sąlygų atveju buvo pabandyta surasti su kokiomis ξ ir y reikšmėmis egzistuoja teigiamos tikrinės funkcijos visiems $\gamma \in \mathbb{R}$. Kai $\xi \in (0, 1)$ ir $y \in (0, 1]$ tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai visiems γ pateikti 3.14 paveiksle, čia raudoni taškai žymi tikrinės funkcijos, kuri atitinka pastoviąją tikrinę reikšmę, teigiamumo intervalą. Kaip matome iš grafiko, funkcija, nusakanti ξ ir y priklausomybę, kai teigiamos tikrinės funkcijos egzistuoja su visomis parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ reikšmėmis, nėra taip paprastai aprašoma, galbūt net nėra tolydi.

3.3.3 *išvada.* Tik kai $\gamma = 0$, kiekvienam $\xi \in (0, 1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos (3.16 paveikslas, a)).

Uždavinyje (3.4)–(3.5), (3.6_4) sritis T_+ apibrėžiama tokiu būdu



a) $\xi = \frac{2}{7}$ b) $\xi = \frac{1}{2}$

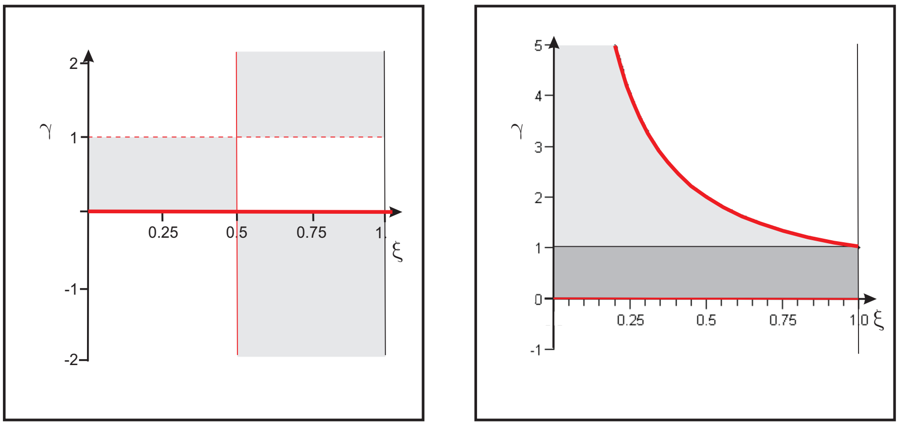
c) $\xi = \frac{2}{3}$ d) $\xi = \frac{5}{7}$

3.15 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 4 atv.

$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}^r_+(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < 0 \text{ ir } \frac{1}{\xi} \le \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } 0 \le \gamma < \frac{1}{\xi}, \end{cases}$$

3.15 paveikslas, pilka sritis.

Kadangi šio uždavinio kraštinės sąlygos, taip pat sutampa su G. Infante nagrinėto (1.2), (1.3_4) uždavinio kraštinėmis sąlygomis, galime palyginti teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis. Kai $-\infty < \gamma < 0$, visiems $\xi \in (0, 1)$, sritis T_+ yra didesnė už G. Infante gautą teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį T. Kai $0 < \gamma < \frac{1}{\xi}$, tai $T = T_+$, o srityje, kai $\gamma \ge \frac{1}{\xi}$, teigiamų tikrinių funkcijų G. Infante nenagrinėja. Kai $\gamma \ge \frac{1}{\xi}$, G. Infante teigia, kad (1.2), (1.3_4) uždavinyje egzistuoja neigiama tikrinė reikšmė, ir ją atitinkanti tikrinė funkcija yra neigiama intervale $[a, b] \subset [\xi, 1]$.



a) 3 atvejis b) 4 atvejis

3.16 pav. Tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai visiems γ ir ξ

Šiuo atveju taip pat braižome funkcijos $\bar{\gamma} = \frac{1}{\xi}$ grafiką ir tiesę $\gamma = 0$ (3.16 paveikslas, b)). Iš šio grafiko matyti, kad, kai $\gamma > 1$, teigiamos visame intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos egzistuoja, kai $\xi \in (0, \xi_4)$.

3.3.4 *išvada.* Kai $\gamma \in [0,1]$, kiekvienam $\xi \in (0,1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos (3.16 paveikslas, b), tamsiai pilka sritis).

3.3.3 *pastaba.* Kai $\gamma > \frac{1}{\xi}$ (1, 4 atv.) arba $\gamma > 1$ (2 atv.), tai (3.4)–(3.6) uždaviniuose egzistuoja neigiama tikrinė reikšmė λ, $\bar{q} = \sqrt{\lambda} = ix$, $x > 0$, ir ją atitinkanti tikrinė funkcija ($u(t) = \mathrm{sh}\,(xt), x > 0$) yra teigiama intervale $(0,1)$.

Uždavinio (3.4)–(3.6$_3$) neigiamos tikrinės reikšmės yra aprašytos disertacijos 2 skyriuje 4 poskyryje 3 skirsnyje 2.4.7 lemoje. Galime parinkti šias neigiamas tikrines reikšmes atitinkančios tikrines funkcijas $u(t) = \mathrm{sh}\,(xt), x > 0$, kurios būtų teigiamos $(0,1)$.

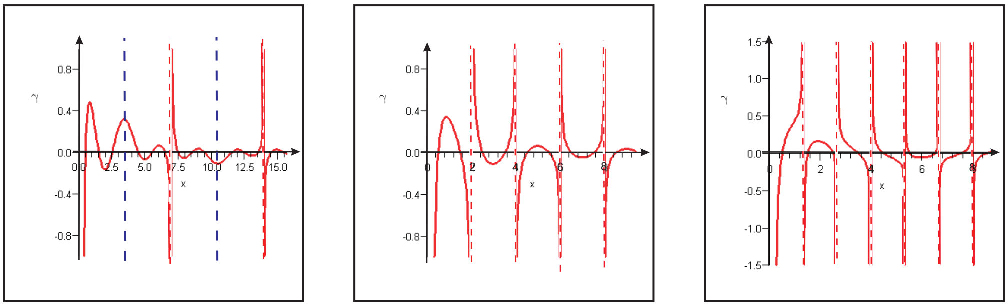
Toliau tirsime Šturmo ir Liuvilio uždavinio (3.4) su G. Infante nagrinėtomis (1.3$_1$) ir (1.3$_3$) kraštinėmis sąlygomis:

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u'(\xi), \qquad \text{(5 atv.)} \qquad (3.10_5)$$
$$u'(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\xi), \qquad \text{(6 atv.)} \qquad (3.10_6)$$

teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis ir palyginsime jas su (1.2)–(1.3$_1$) ir (1.2), (1.3$_3$) uždavinių tikrinių funkcijų teigiamumo sritimis.

Kai $\gamma = 0$ (5 atv. ir kai $\xi = 0$), tai abiem šiais atvejais gauname uždavinį su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$



a) $\xi = \frac{2}{7}$ b) $\xi = \frac{1}{2}$ c) $\xi = \frac{3}{4}$

3.17 pav. Funkcijos $\gamma_{5+}(x\pi)$ grafikai

Tada klasikinės tikrinės reikšmės ir jas atitinkančios klasikinės tikrinės funkcijos įgyja pavidalą

$$\lambda_k = \pi^2 \big(k - \tfrac{1}{2}\big)^2, \qquad u_k(t) = \cos\big(\pi(k - \tfrac{1}{2})t\big), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.11$_{5,6}$}$$

Bendruoju atveju, kai $\lambda \neq 0$, tikrinės funkcijos yra $u(x) = \cos(qt)$ ir tikrinės reikšmės $\lambda = q^2$.

Visas nepastoviąsias tikrines reikšmes galime gauti iš šių funkcijų:

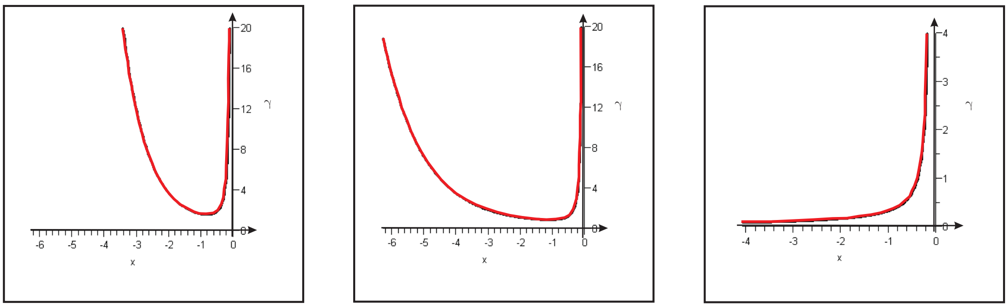
$$\gamma_5(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{5-}(x;\xi) & = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{x\mathrm{sh}\,(\xi x)}, \qquad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{5+}(x;\xi) & = -\dfrac{\cos x}{x \sin(\xi x)}, \quad \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{3.12$_5$}$$

$$\gamma_6(x;\xi) = \gamma_2(x;\xi) := \begin{cases} \gamma_{2-}(x;\xi) & = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{ch}\,(\xi x)}, \quad \text{kai } x \leqslant 0, \\ \gamma_{2+}(x;\xi) & = \dfrac{\cos x}{\cos(\xi x)}, \quad \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{3.12$_6$}$$

Funkcijos $\gamma_{5+}(x\pi)$ grafikai pateikti 3.17 paveiksle, o funkcijos $\gamma_{5-}(x\pi)$ – 3.18 paveiksle.

Jei $\xi \in (0,1)$ ir $\gamma > \gamma_0$, tai (3.4)–(3.10$_5$) uždavinys turi dvi neigiamas tikrines reikšmes, jei $\gamma = \gamma_0$, egzistuoja viena neigiama kartotinė tikrinė reikšmė, ir jei $\gamma < \gamma_0$, tai neigiamos tikrinės reikšmės neegzistuoja (3.18 paveikslas, a), b)). Kai $\xi = 1$, tai $\gamma_{5-}(x)$ yra didėjanti funkcija, ir šiuo atveju visiems $\gamma > 0$ egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė (3.18 paveikslas, c)). Šias neigiamas tikrines reikšmes atitinkančios tikrinės funkcijos $u(t) = \mathrm{ch}\,(xt)$, $x < 0$ yra teigiamos intervale $(0,1)$.

3.3.1 lema. *Tikrinė reikšmė* $\lambda = 0$ (3.4)*,* (3.10$_5$) *uždavinio atveju neegzistuoja (3.17 paveikslas ir 3.18paveikslas).*



a) $\xi = 0.5$ b) $\xi = 0.7$ c) $\xi = 1$

3.18 pav. Funkcijos $\gamma_{5-}(x\pi)$ grafikai

Įrodymas. Lygties (3.4) bendrojo sprendinio ieškosime $u(t) = c_1 t + c_2$ pavidalu. Sprendinio išvestinė yra lygi $u'(t) = c_1$. Tada iš (3.10$_5$) ($u'(0) = 0$) seka, kad $c_1 = 0$, tai yra $u(t) = c_2$. Iš (3.10$_5$) ($u(1) = \gamma u'(\xi)$) gauname $c_2 = \gamma \cdot 0$. Vadinasi, $u(t) \equiv 0$ ir šiuo atveju nulinė tikrinė reikšmė neegzistuoja. ■

Kai parametras $\xi = \frac{m}{n}$ yra racionalusis skaičius ir $m \in \mathbb{N}_e, n \in \mathbb{N}_o$, tai (3.4), (3.10$_5$) uždavinyje egzistuoja pastoviosios tikrinės reikšmės, ir jos yra lygios $c_k = \pi\big(k - \frac{1}{2}\big)n, k \in \mathbb{N}$. Jei $\xi \in \Xi$, tai $x_j = \pi\big(k - \frac{1}{2}\big), k \in \mathbb{N}$ yra funkcijos $\gamma_{5+}(x)$ nuliai, o taškai $p_k = \frac{\pi k}{\xi}, k \in \mathbb{N}$ – poliai.

Funkcija $\gamma_{6+}(x)$ sutampa su funkcija $\gamma_{2+}(x)$, o visos šios funkcijos savybės yra aprašytos ankstesniame skyriuje (2 skyrius).

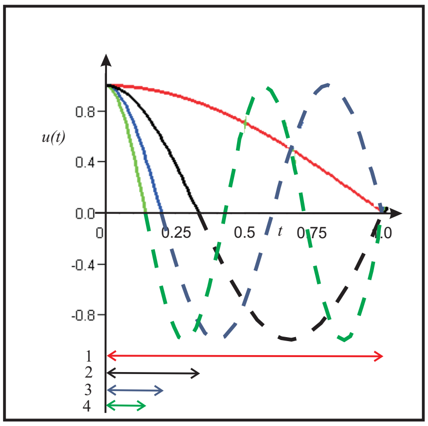
3.3.4 *pastaba.* Kai $\xi \in (0, 1)$ ir $\gamma > 1$ (6 atv.), tai (3.4), (3.10$_6$) uždavinyje egzistuoja viena neigiama tikrinė reikšmė, ir ją atitinkanti tikrinė funkcija ($u(t) = \operatorname{ch}(xt), x > 0$) yra teigiama intervale $(0, 1)$. Kai $\xi = 1$ ir $\gamma = 1$, uždavinyje lieka vienintelė kraštinė sąlyga $u'(0) = 0$. Kai $\xi = 1$ ir $\gamma \neq 1$, turime klasikinį atvejį $u' = 0, u(1) = 0$.

Panaudojus klasikinį atvejį, galime užrašyti tikrines reikšmes $x_k(0) = \pi(k - \frac{1}{2}), k \in \mathbb{N}$, (5, 6 atv.) ir jas atitinkančias tikrines funkcijas

$$u_k(t) = \cos\left(\pi\Big(k - \frac{1}{2}\Big)t\right), \ k \in \mathbb{N}, \qquad \text{(5, 6 atv.).}$$

Šios funkcijos yra teigiamos intervaluose $x \in \left(0, \frac{1}{2\left(k - \frac{1}{2}\right)}\right), k \in \mathbb{N}$ (3.19 paveikslas). Pirmoji funkcija yra teigiama intervale $(0, 1)$.

Kadangi, tikrinės funkcijos bendruoju atveju yra proporcingos $u(t) = c\cos(xt)$, o funkcija $\cos(xt)$ yra teigiama, kai $xt \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$. Čia x reikšmes galime surasti iš lygties $\gamma(x) = \gamma$. Tada $x = \frac{\pi}{2t_+}$ $\big(t_+$ galime gauti išsprendę lygtį $\gamma(\frac{\pi}{2t_+}) = \gamma\big)$.



a) $u_k(t), k = 1, 2, 3, 4$

3.19 pav. Klasikinių tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai

Toliau žymėsime $t_+ = y$. Vadinasi, visas nepastoviąsias tikrines reikšmes atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalus galėsime gauti (3.12) formulėje atlikę transformaciją $x = \frac{\pi}{2y}$:

$$\hat{\gamma}_{5+}(y;\xi) = -\frac{\cos\frac{\pi}{2y}}{\frac{\pi}{2y}\sin(\xi\frac{\pi}{2y})}, \tag{3.13$_5$}$$

$$\hat{\gamma}_{6+}(y;\xi) = \frac{\cos\frac{\pi}{2y}}{\cos(\xi\frac{\pi}{2y})}. \tag{3.13$_{2,6}$}$$

Funkcijų $\hat{\gamma}_{l+}, l = 5, 6$ grafikai pateikti 3.20 ir 3.22 paveiksluose.

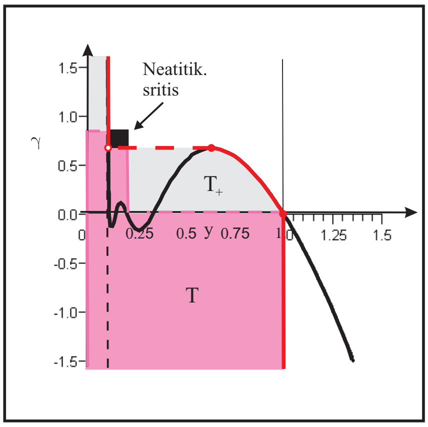
Šturmo ir Liuvilio uždavinio (3.4), (3.10$_5$) teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį T_+ galima užrašyti

$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < 1, & \text{kai } -\infty < \gamma < 0, \\ 0 < y < \bar{x}^r_+(\gamma;\xi), & \text{kai } 0 \le \gamma < +\infty, \end{cases}$$

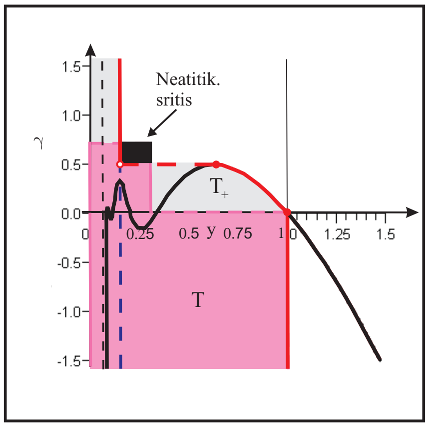
3.20 paveikslas, šviesesnė sritis.

Lyginant (1.2)–(1.3$_1$) ir (3.4), (3.10$_5$) uždavinių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis, galime pastebėti, kad, kai $\gamma < 0$, tai $T = T_+$. Kai $\xi_0 < \xi < \xi_1$ ($\xi_0 \approx 0.16, \xi_1 \approx 0.65$) ir $\gamma^* < \gamma < 1 - \xi$, taip pat kaip ir (3.4)–(3.5), (3.6$_3$) uždavinyje, gaunama neatitikimo sritis (3.20 paveikslas, a), b), c), juoda sritis). Kitais atvejais, kai $0 < \gamma < 1 - \xi$, sritis T_+ yra didesnė už sritį T (3.20 paveikslas, d), šviesesnė sritis), o srities, kai $\gamma > 1 - \xi$, G. Infante nenagrinėja.

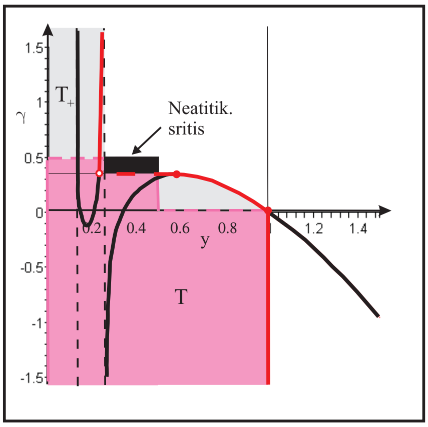
3.3.5 *išvada.* Kai $\gamma \in (-\infty, 0]$, kiekvienam $\xi \in (0, 1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos (3.21 paveikslas, a), pilka sritis).



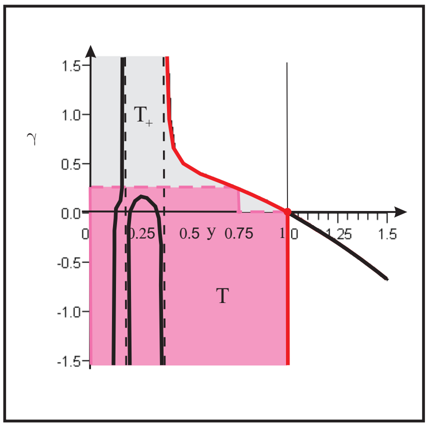
a) $\xi = \frac{1}{5}$



b) $\xi = \frac{2}{7}$



c) $\xi = \frac{1}{2}$



d) $\xi = \frac{3}{4}$

3.20 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 5 atv.

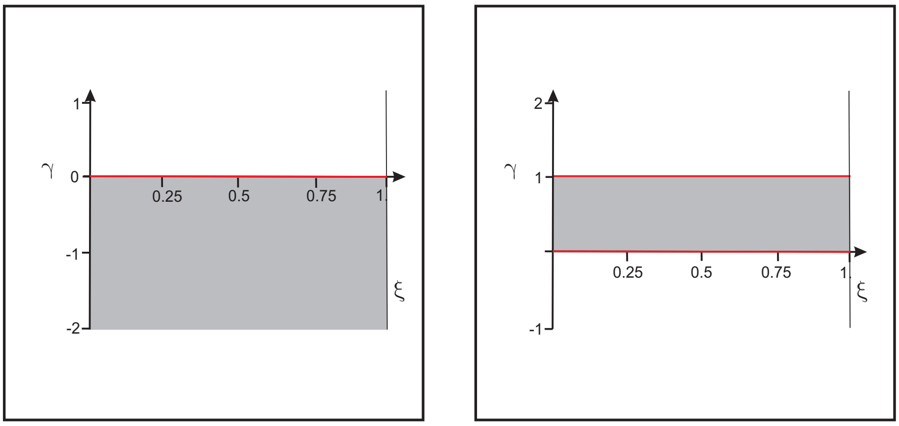
Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritį T_+ (3.4), (3.10$_6$) uždaviniui galime apibrėžti:

$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}^r_+(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < 0 \text{ ir } 1 < \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } 0 < \gamma \leq 1, \end{cases}$$

3.22 paveikslas, šviesesnė sritis.

Kai $\gamma < 0$, (3.4), (3.10$_6$) uždavinio sritis T_+ yra didesnė už (1.2), (1.3$_3$) uždavinio sritį T, o kai $0 < \gamma < 1$, tai $T_+ = T$. Kai $\gamma > 1$, teigiamų tikrinių funkcijų G. Infante nenagrinėja.

3.3.6 *išvada.* Kai $\gamma \in [0, 1]$, kiekvienam $\xi \in (0, 1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos (3.21 paveikslas, b), pilka sritis).



a) 5 atvejis b) 6 atvejis

3.21 pav. Tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai visiems γ ir ξ

3.4. Šturmo ir Liuvilio uždavinio su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis teigiamos tikrinės funkcijos

Nagrinėkime Šturmo ir Liuvilio uždavinio

$$-u''(t) = \lambda u(t), \quad t \in (0,1), \tag{4.14}$$

$$u(0) = 0, \tag{4.15}$$

su viena nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

$$u(1) = \gamma \int_0^{\xi} u(x)dx, \qquad \text{(7 atv.)} \tag{4.16$_7$}$$

$$u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1} u(x)dx. \qquad \text{(8 atv.)} \tag{4.16$_8$}$$

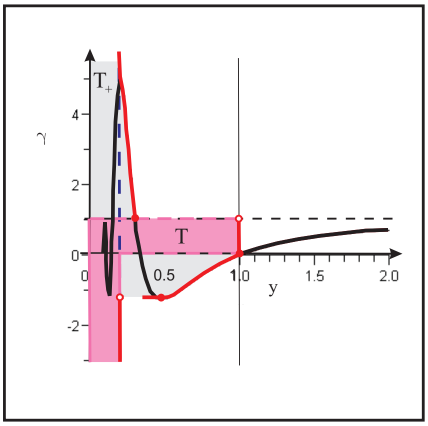
su parametrais $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in (0,1)$ teigiamas tikrines funkcijas.

Kai parametras $\gamma = 0$ ir bendruoju atveju, šių uždavinių tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos sutampa su šio skyriaus 1 poskyrio 3, 4 atv. uždavinių tikrinėmis reikšmėmis ir funkcijomis (3.7$_{3,4}$).

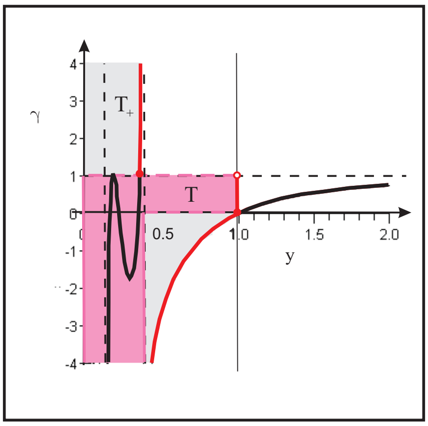
Visas nepastoviąsias tikrines reikšmes gauname iš (1 skyriaus 4 poskyris):

$$\gamma_{7+}(x;\xi) = \frac{x \sin x}{2\sin^2(\frac{\xi x}{2})}, \tag{4.17$_7$}$$

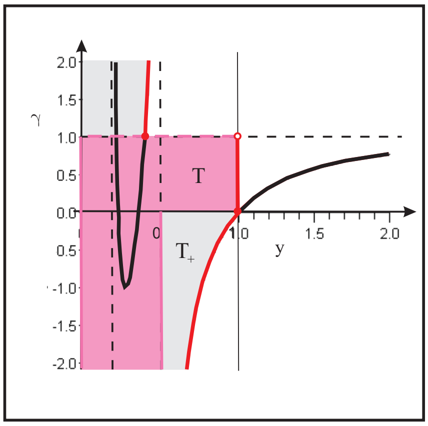
$$\gamma_{8+}(x;\xi) = \frac{x \sin x}{2\sin(\frac{(1+\xi)x}{2})\sin(\frac{(1-\xi)x}{2})}. \tag{4.17$_8$}$$



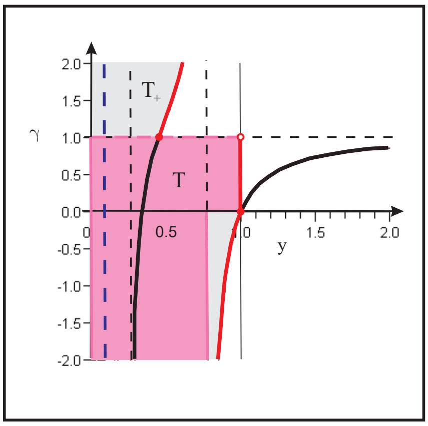
a) $\xi = \frac{1}{5}$



b) $\xi = \frac{4}{11}$



c) $\xi = \frac{1}{2}$



d) $\xi = \frac{7}{9}$

3.22 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 6 atv.

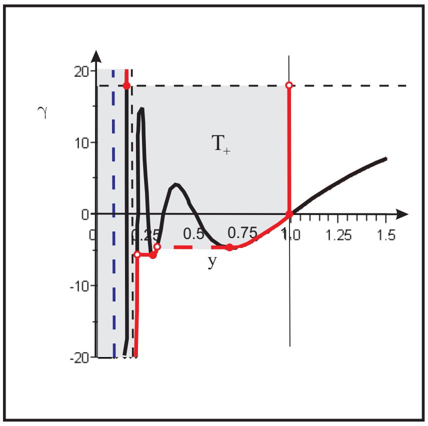
Funkcijų $\gamma_{l+}, l = 1, 2$ grafikai, kai $x \in \mathbb{R}$ yra pateikti 1 skyriuje 4 poskyryje 2 paveiksle.

Nepastoviąsias tikrines reikšmes atitinkančių tikrinių funkcijų teigiamumo intervalus galime gauti (4.17) formulėje atlikę transformaciją $x = \frac{\pi}{y}$

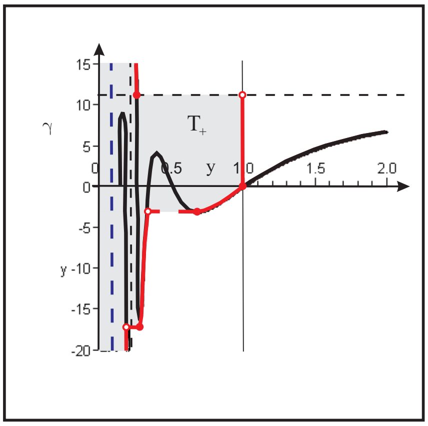
$$\hat{\gamma}_{7+}(y;\xi) = \frac{\frac{\pi}{y}\sin\frac{\pi}{y}}{2\sin^2(\frac{\xi\pi}{2y})}, \tag{4.18$_7$}$$

$$\hat{\gamma}_{8+}(y;\xi) = \frac{\frac{\pi}{y}\sin\frac{\pi}{y}}{2\sin(\frac{(1+\xi)\pi}{2y})\sin(\frac{(1-\xi)\pi}{2y})}. \tag{4.18$_8$}$$

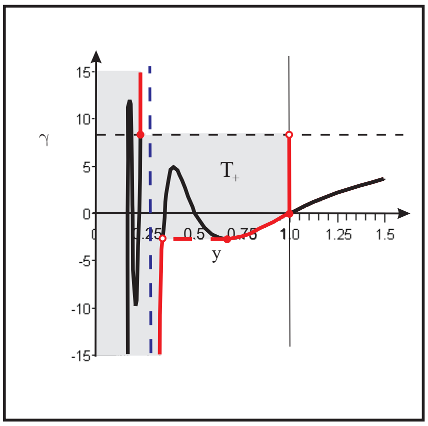
Funkcijų $\hat{\gamma}_{l+}, l = 1, 2$ grafikai pateikti 3.23 ir 3.24paveiksluose.



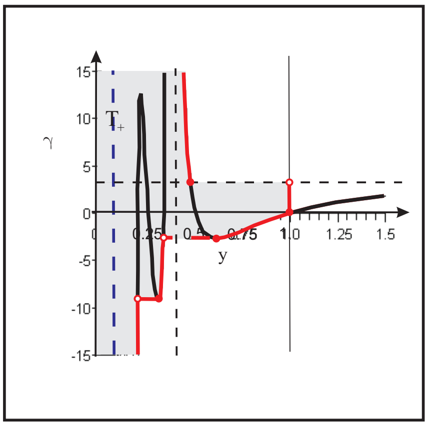
a) $\xi = \frac{1}{3}$



b) $\xi = \frac{4}{9}$



c) $\xi = \frac{1}{2}$



d) $\xi = \frac{3}{4}$

3.23 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 7 atv.

Uždavinyje (4.14)–(4.16$_7$) teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis T_+ apibrėžiama

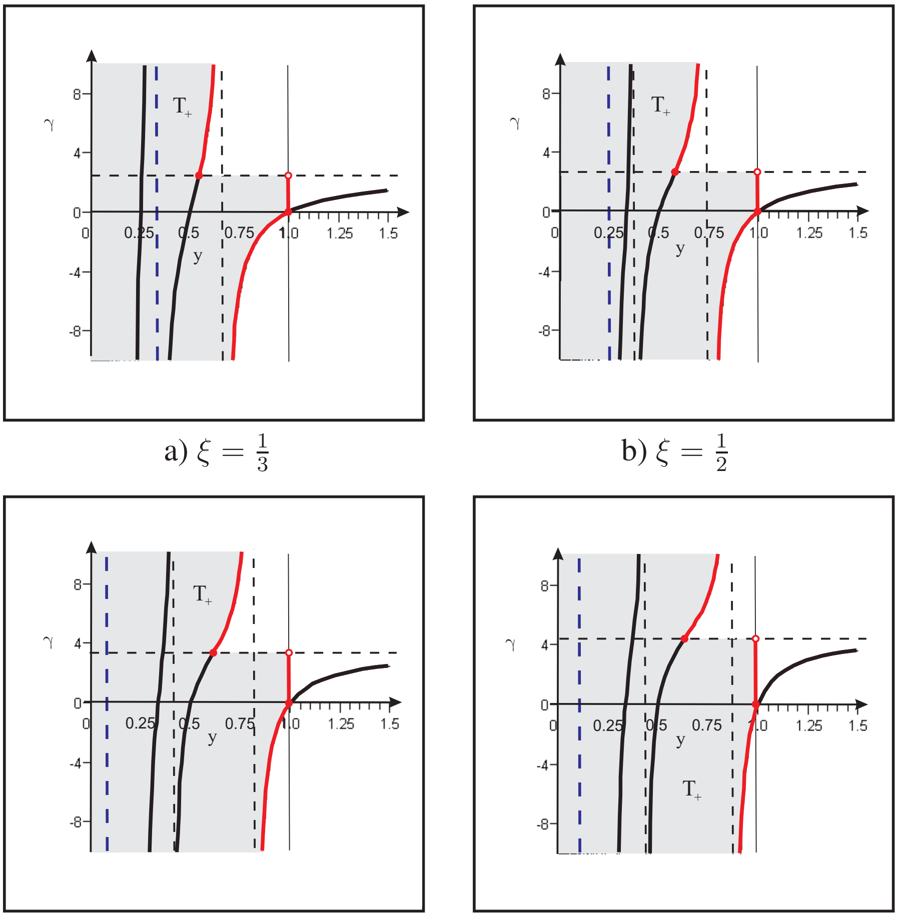
$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}_+^r(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < 0 \text{ ir } \frac{2}{\xi^2} \leq \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } 0 \leq \gamma < \frac{2}{\xi^2}, \end{cases}$$

3.23 paveikslas, ir (4.14)–(4.16$_8$) uždavinyje

$$T_+ = \begin{cases} 0 < y < \bar{x}_+^r(\gamma;\xi), & \text{kai } -\infty < \gamma < 0 \text{ ir } \frac{2}{1-\xi^2} \leq \gamma < +\infty, \\ 0 < y < 1, & \text{kai } 0 \leq \gamma < \frac{2}{1-\xi^2}, \end{cases}$$

3.24 paveikslas

Šiais atvejais norėdami išsiaiškinti kokiems parametrams γ ir ξ egzistuoja teigiamos intervale $(0,1)$ tikrinės funkcijos, braižome funkcijų $\bar{\gamma} = \frac{2}{\xi^2}$ (7 atv.) ir



a) $\xi = \frac{1}{3}$ b) $\xi = \frac{1}{2}$

c) $\xi = \frac{7}{11}$ d) $\xi = \frac{3}{4}$

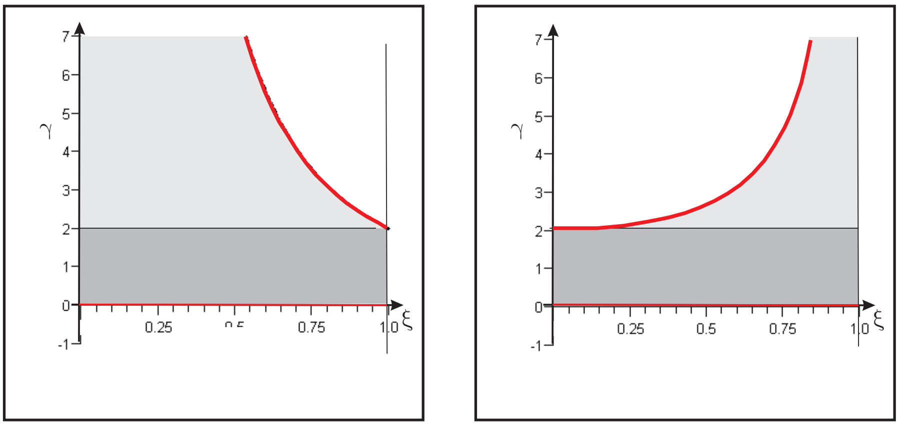
3.24 pav. Teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys 8 atv.

$\bar{\gamma} = \frac{2}{1-\xi^2}$ (8 atv.) grafikus ir tiesę $\gamma = 0$ (3.25 paveikslas). Iš šio grafiko matyti (šviesiai pilka sritis), kad, kai $\gamma > 2$, teigiamos visame intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos egzistuoja, kai $\xi \in (0, \xi_7)$ (7 atv.) ir $\xi \in (\xi_8, 1)$ (8 atv.).

3.4.1 *išvada.* Uždaviniuose (4.14)–(4.16$_7$) ir (4.14)–(4.16$_8$), kai $\gamma \in [0, 2]$, kiekvienam $\xi \in (0, 1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos (3.25 paveikslas, tamsiai pilka sritis).

3.5. Teorema apie teigiamų tikrinių reikšmių ir jas atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimą

3.5.1 teorema. *Jeigu* $(t, \gamma) \in T_+$, *tai* (3.4) – (3.6), (3.4), (3.10) *ir* (4.14)–(4.16) *uždaviniuose egzistuoja teigiama tikrinė reikšmė ir ją atitinkanti tikrinė funkcija*



a) 7 atvejis b) 8 atvejis

3.25 pav. Tikrinių funkcijų teigiamumo intervalai visiems γ ir ξ

yra teigiama $(0, t)$.

3.5.1 *pastaba.* Kiekvieno šiame disertacijos skyriuje nagrinėjamo uždavinio atveju galime nurodyti teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritis visiems γ.

3.5.2 *pastaba.* Šie rezultatai apibendrina G. Infante [54] gautus rezultatus šioje disertacijoje nagrinėjamų uždavinių atveju.

3.6. Pagrindiniai skyriuje gauti rezultatai

- Ištirtos Šturmo ir Liuvilio uždavinių su nelokaliosiomis dvitaškėmis ir integralinėmis kraštinėmis sąlygomis teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo sritys.

- Kiekvienu nelokaliųjų kraštinių sąlygų atveju surastos parametro γ reikšmės, su kuriomis kiekvienam $\xi \in (0, 1)$ egzistuoja teigiamos intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos.

- Gauti rezultatai palyginti su G. Infante [54] straipsnyje aprašytais rezultatais.

- Suformuluota teorema apie teigiamų tikrinių reikšmių ir jas atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimą.

4 skyrius

Stacionarieji uždaviniai su įvairių tipų nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

4.1. Stacionarieji ir paraboliniai uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Mokslinėje literatūroje gana plačiai nagrinėjami paraboliniai ir stacionarieji uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Skaitinių metodų tokiems uždaviniams kūrimas ir jų teorinis pagrindimas yra aktualus skaičiuojamojoje matematikoje. Šie uždaviniai tiriami tiek užsienio [32, 38, 44], tiek Lietuvos mokslininkų darbuose [16, 21, 22, 23, 26, 60, 95]. Straipsniuose [22, 95] buvo surastos būtinos ir pakankamos kai kurių kraštinių uždavinių išsprendžiamumo sąlygos.

R. Čiegio, A. Štikono, O. Štikonienės ir O. Subač straipsnyje [23] suformuluotas stacionarusis uždavinys su kraštinėmis sąlygomis, kurias sudaro nelokaliųjų taškinių ir integralinių sąlygų kombinacija:

$$L(u) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big) + q(x)u = f, \quad x \in (0,1), \tag{1.1}$$

$$u(0) - \gamma_0\big(\tilde{\alpha}_0 u(\tilde{x}_0) + \int_0^1 \tilde{\beta}_0(x)u(x)\mathrm{d}x\big) = f_0, \tag{1.2}$$

$$u(1) - \gamma_1\big(\tilde{\alpha}_1 u(\tilde{x}_1) + \int_0^1 \tilde{\beta}_1(x)u(x)\mathrm{d}x\big) = f_1. \tag{1.3}$$

Šis uždavinys, kai $f = 0$, buvo tiriamas [22]. Straipsnyje nagrinėta neišreikštinė baigtinių skirtumų schema šiam uždaviniui, surastos būtinos ir pakankamos sprendinio egzistavimo sąlygos, įrodytas šių uždavinių stabilumas kraštinių sąlygų atžvilgiu.

Straipsnyje [23] srityje $Q_T = (0,1) \times (0,T]$, $0 < T < \infty$ buvo nagrinėjamas parabolinis uždavinys

$$\rho(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big)-q(x,t)u+f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{1.4}$$

su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$u(0,t)=\gamma_0\big(\tilde\alpha_0(t)u(\tilde x_0(t),t)+\int_0^1\tilde\beta_0(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\big)+f_0(t), \tag{1.5}$$

$$u(1,t)=\gamma_1\big(\tilde\alpha_1(t)u(\tilde x_1(t),t)+\int_0^1\tilde\beta_1(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\big)+f_1(t), \tag{1.6}$$

čia $t\in(0,T]$, ir su pradine sąlyga

$$u(x,0)=u^0(x),\quad x\in[0,1]. \tag{1.7}$$

Šiame straipsnyje (1.1)–(1.3) ir (1.4)–(1.7) uždaviniams buvo sukonstruota skirtumų schema

$$R\bar\partial_t U+L_Q(U)=F\quad \omega, \tag{1.8}$$

$$U|_{i=0}-\gamma_0(A_0\tilde L U(X_0)+\tilde A_0\tilde L\tilde U(\tilde X_0)+(B_0,U)+(\tilde B_0,\tilde U))=F_0,\ \partial\omega_0, \tag{1.9}$$

$$U|_{i=n}-\gamma_1(A_1\tilde L U(X_1)+\tilde A_1\tilde L\tilde U(\tilde X_1)+(B_1,U)+(\tilde B_1,\tilde U))=F_1,\ \partial\omega_1, \tag{1.10}$$

$$U|_{j=0}=U^0\quad \partial\omega^0, \tag{1.11}$$

čia $D(\omega)$ yra realiųjų tinklinių funkcijų erdvė, apibrėžta tinkle ω, kuris gali būti vienas iš įvado 7 poskyryje aprašytų tinklų. Tinklinė funkcija $U\in D(\bar\omega)$, operatorius $L_Q(U):D(\omega\cup\partial\omega_0\cup\partial\omega_1)\to D(\omega)$, $L_Q(U):=-\delta(P\delta U)+QU$, $R\in D(\omega)$, $0<p_0\le P\in D(\omega^h_{1/2})$, $0\le q_0\le Q\in D(\omega)$, $F\in D(\omega)$, $B_l,\bar B_l\in D(\bar\omega)$, $F_l\in D(\partial\omega_0\cup\partial\omega_1)$, $\partial\omega=\partial\omega^0\cup\partial\omega_0\cup\partial\omega_1$.

Nestacionariajam uždaviniui $0\le\rho_0\le R$, $\bar\omega=\bar\omega^{h,\tau}$, $\omega=\omega^{h,\tau}$, $\omega_{1/2}=\omega^{h,\tau}_{1/2}$, $\bar{\partial\omega_l}=\{l\}\times\bar\omega^\tau$, $\partial\omega_l=\{l\}\times\omega^\tau$, $\partial\omega^0=\omega^h\times t_0$, $0\le X_l,\bar X_l\le 1$, $X_l,\bar X_l\in D(\bar\omega^\tau)$, $A_l,\bar A_l\in D(\bar\omega^\tau)$ ir išpildyta suderinamumo sąlyga $U^0|_{i=0}=\gamma_0(A^0_0\tilde L U^0(X^0_1)+\bar A^0_1\tilde L U^0(\bar X^0_1)+(B^0_1,U^0)+(\bar B^0_1,U^0))+F^0_1$. Jeigu $\bar A_l=\bar B_l\equiv 0$, tai nelokaliųjų kraštinių sąlygų aproksimacija yra neišreikštinė, o kai $A_l=B_l\equiv 0$ – šių sąlygų aproksimacija išreikštinė, čia $l=0,1$.

Stacionariajam uždaviniui $R\equiv 0$, $\bar\omega=\bar\omega^h$, $\omega=\omega^h$, $\omega_{1/2}=\omega^h_{1/2}$, $\bar{\partial\omega_l}=\partial\omega_l=\{l\}$, $\partial\omega^0=\varnothing$, $0\le X_l\le 1$, $X_l,A_l\in\mathbb{R}$, $\bar A=\bar B\equiv 0$, $l=0,1$.

Taip pat šiame straipsnyje buvo surasti fundamentalieji sprendiniai ir įrodytos jų savybės. Klasikinių uždavinių

$$\begin{cases} \tilde{R}\bar{\partial}_t\Phi_0 + L_{\tilde{Q}}(\Phi_0) &= 0, \\ \Phi_0|_{i=0} = 1, \Phi_0|_{i=n} &= 0, \\ \Phi_0^0 &= 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{R}\bar{\partial}_t\Phi_1 + L_{\tilde{Q}}(\Phi_1) &= 0, \\ \Phi_1|_{i=0} = 0, \Phi_1|_{i=n} &= 1, \\ \Phi_1^0 &= 0; \end{cases}$$

čia $0 \leq \tilde{R} \leq R$, $0 \leq \tilde{Q} \leq Q$, sprendiniai $\Phi_l = (\Phi_l(\tilde{R}, \tilde{Q}))_i^j$ vadinami fundamentaliaisiais. Šie fundamentalieji sprendiniai pasižymi tokiomis savybėmis:

1) $0 \leq \Phi_0 \leq 1, 0 \leq \Phi_1 \leq 1, 0 \leq \Phi_0 + \Phi_1 \leq 1$;
2) jeigu $\bar{\partial}_t\tilde{Q} \leq 0$, $\bar{\partial}_t\tilde{R} \leq 0$, tai Φ_l – nemažėjanti pagal j funkcija, tai yra $\bar{\partial}_t\Phi_l \geq 0$;
3) jeigu $\bar{\partial}_t\Phi_l \geq 0$, tai Φ_0 – nedidėjanti pagal i funkcija, o Φ_1 – nemažėjanti pagal i funkcija.

Straipsnyje [23] įrodytas diskrečiojo uždavinio korektiškumas maksimumo normose stacionariojo (kai F – bet kokia funkcija) ir nestacionariojo uždavinių atvejais. Įrodymuose pagrinde buvo naudojamasi maksimumo principu.

Straipsniuose [22, 23] diferencialiniu atveju įvedamos matricos:

$$\mathbf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 := \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < k_0, \varphi_0 > & < k_0, \varphi_1 > \\ < k_1, \varphi_0 > & < k_1, \varphi_1 > \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} := \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Phi_0}(x) := \begin{pmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix},$$

taip pat pažymėta $\mathbf{A}_0 := \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{K}_0$. Ir diskrečiuoju atveju:

$$\mathbf{K}_h := \begin{pmatrix} < K_0, \Phi_0 > & < K_0, \Phi_1 > \\ < K_1, \Phi_0 > & < K_1, \Phi_1 > \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_h(x_i) := \begin{pmatrix} \Phi_0(x_i) & \Phi_1(x_i) \end{pmatrix},$$

tuomet $\mathbf{A}_h := \mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{K}_h$, $\mathbf{F} = (F_0\ F_1)^T$. Kadangi lygybės ir diferencialiniu, ir diskrečiuoju atvejais yra panašios, tai indekso h toliau nerašysime. Pagrindinė sprendinio egzistavimo sąlyga det$\mathbf{A} \neq 0$ užrašoma tokiu būdu:

$$\theta := 1 - \gamma_0 k_{00} - \gamma_1 k_{11} + \gamma_0\gamma_1 \mathrm{det}\mathbf{K} \neq 0.$$

Parametrai γ_0, γ_1 apibrėžti plokštumos ketvirtyje $\mathbb{R}_+^2 = \{(\gamma_0, \gamma_1) | \gamma_0 \geqslant 0, \gamma_1 \geqslant 1\}$ Taip pat įvedamos sritys:

$$\Omega_+ := \{\theta > 0, \gamma_0 k_{00} \leqslant 1, \gamma_1 k_{11} \leqslant 1,\ \gamma_0 k_{01} \geqslant 0, \gamma_1 k_{10} \geqslant 0\}, \tag{1.12}$$
$$\Omega_+^\varepsilon := \{\gamma \in \Omega_+ |\ |\theta| \geqslant \varepsilon > 0, \gamma_0 \leqslant \varepsilon^{-1}, \gamma_1 \leqslant \varepsilon^{-1}\}. \tag{1.13}$$

Sritis Ω_+ apibrėžia stacionariojo uždavinio būtinas ir pakankamas išsprendžiamumo sąlygas nelokaliųjų sąlygų parametrų γ_0, γ_1 atveju, toje pačioje erdvėje, kaip ir klasikiniame uždavinyje. Tačiau stabilumo įrodymui reikalingas šios srities siaurinys – sritis Ω_+^ε. Šios sritys plačiau yra aprašytos [22] darbe.

Straipsnyje [22] suformuluotos būtinos ir pakankamos skirtumų schemos stabilumo sąlygos maksimumo normoje.

4.1.1 teorema. Stacionariojo uždavinio skirtumų schemos stabilumas. *Jeigu* $(\gamma_0, \gamma_1) \in \Omega_+^\varepsilon$, *tai* (1.8)–(1.10) *uždavinio sprendiniui teisingas įvertis:*

$$\|U\|_\infty \le \Big(1 + \varepsilon^{-2}(1 + 2\varepsilon^{-1})\big(\sum_l < |K_l|, 1 > \big)^2\Big)(\max\{|F_0|, |F_1|\} \tag{1.14}$$
$$+ \|F\|_\infty / \max\{q_0, 2p_0\}).$$

Parabolinio uždavinio atveju analogiškos sritys $\Omega_+^\varepsilon(\tilde{\mathbf{K}})$ aprašytos [23] straipsnyje. Šiame darbe suformuluotos pakankamos skirtumų schemos stabilumo sąlygos maksimumo normoje.

4.1.2 teorema. Nestacionariojo uždavinio skirtumų schemos stabilumas. *Jeigu* $(\gamma_0, \gamma_1) \in \Omega_+^\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{K}})$, *tai nestacionariojo* (1.8)–(1.10) *uždavinio sprendiniui teisingas įvertis:*

$$\|U\|_{\infty,\bar{\omega}} \le \Big(1 + \frac{1 + 2\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^2}\Big)\Big(\sum_l < \max_j |K_l| + \max_j |\bar{K}_l|, 1 >)^2\Big) \tag{1.15}$$
$$\Big(\sum_l \|F_l\|_{\infty,\bar{\omega}_l} + \|U^0\|_\infty + \frac{\|F\|_{\infty,\bar{\omega}}}{\max\{q_0, 2p_0\}}\Big).$$

Skirtumų schemos (1.8)–(1.10) sprendinys konverguoja į nestacionariojo diferencialinio uždavinio sprendinį, ir konvergavimo greitis yra lygus $O(h^2 + \tau)$.

Šiame disertacijos skyriuje siekiama apibendrinti [23, 24] straipsniuose ir O. Suboč daktaro disertacijoje „Kai kurie uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis“(2002) paskelbtus rezultatus, kai duotos įvairesnės nelokaliosios kraštinės sąlygos. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai atspausdinti [3A] straipsnyje.

4.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime stacionarųjį kraštinį uždavinį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:

$$L(u) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big) + q(x)u = f, \;\; x \in (0, L), \tag{2.16}$$

$$L_0(u) := \gamma_0 < k_0, u > + g_0, \tag{2.17}$$

$$L_1(u) := \gamma_1 < k_1, u > + g_1, \tag{2.18}$$

čia $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $q(x) \geqslant q_0 \geqslant 0$. Parametrai $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}^2_+$, t.y. $\gamma_0 \geqslant 0$, $\gamma_1 \geqslant 0$. Kraštinės sąlygos gali būti pirmojo tipo

$$L_0(u) := u|_{x=0},$$
$$L_1(u) := u|_{x=L}$$

arba

$$L_0(u) := \Big(-p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + r(x)u\Big)\Big|_{x=0},$$
$$L_1(u) := \Big(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + r(x)u\Big)\Big|_{x=L}.$$

Kai $r(l) = 0$, tai kraštinė sąlyga yra antrojo tipo. Čia ir toliau, $l = 0$ yra kraštinė sąlyga, kai $x = 0$ ir $l = L$, kai $x = L$. Atvejis $r(l) > 0$ atitinka trečiojo tipo kraštinę sąlygą. Jeigu abi kraštinės sąlygos (kai $x = 0, L$) yra antrojo tipo, tai papildomai reikalausime $q(x) \geqslant q_0 > 0$. Nelokaliosios sąlygos apibrėžiamos tiesiniais funkcionalais k_l:

$$< k_l, u >:= \sum_{j=1}^{J} \alpha_l^j u(a_l^j) + \int_0^L \big(\beta_l(x)u(x) + \bar{\beta}_l(x)u'(x)\big)\mathrm{d}x,$$

čia $0 \leqslant a_l^1 < \cdots < a_l^J \leqslant L$. Pastebėsime, kad nelokaliojoje sąlygoje Samarskio ir Bitsadzės sąlyga yra bendresnė negu [22, 23], o integralinėje nelokaliojoje sąlygoje įvestas papildomas narys su išvestine. Laikysime, kad koeficientai $p(x)$, $q(x)$, $\beta_l(x)$, $\bar{\beta}_l(x)$, $f(x)$ yra tokie, kad garantuojamas klasikinio ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) uždavinio išsprendžiamumas tam tikroje funkcijų klasėje (pavyzdžiui, C^2 arba W_2^1). Koeficientai γ_0 ir γ_1 apibrėžia nelokališkumo svorį kraštinėje sąlygoje.

4.3. Baigtinių skirtumų schemos

Užrašykime antros eilės baigtinių skirtumų schemas (2.16)–(2.18) stacionariajam uždaviniui:

$$L(U) := -\delta(P\delta U) + QU = F, \quad x_i \in \omega^h, \tag{3.19}$$

su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:

$$L_0(U) := \gamma_0 < K_0, U > +G_0, \tag{3.20}$$
$$L_1(U) := \gamma_1 < K_1, U > +G_1, \tag{3.21}$$

čia

$$L_l(U) := U|_{i=nl}$$

arba

$$L_l(U) := (-1)^{l+1}\big(P\delta U\big)|_{i=nl+(-1)^l 1/2} + R_{nl}U_{nl} - h_{nl+1/2}(F_{nl} - Q_{nl}U_{nl}),$$

o K_l yra tiesiniai diskretieji funkcionalai

$$< K_l, U >:= \sum_{j=1}^{J} \alpha_l^j \tilde{U}(a_l^j) + (B_l, U) + (\overline{B}_l, \delta U),$$

kaip ir anksčiau $l = 0, 1$. Čia P, R, Q yra funkcijų $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ aproksimacijos, $\tilde{U} = \tilde{L}U$ yra tiesinio interpoliavimo metodu gauta diskrečiosios funkcijos U reikšmė, jei a_l^j yra ne tinklo taškas, B_l, $\bar{B}_l$ yra pointegrinių branduolių β_l, $\bar{\beta}_l$ diskrečiosios aproksimacijos ir integralai funkcionalo išraiškose aproksimuoti trapecijų formule (Įvado 7 poskyris). Kaip ir diferencialiniame uždavinyje laikysime, kad $P \geqslant p_0 > 0$, $R_l \geqslant 0$, $Q \geqslant q_0 \geqslant 0$ (jei abi kraštinės sąlygos yra antrojo tipo, tuomet $q_0 > 0$). Visų šių skirtumų schemų aproksimacija pakankamai glodiems sprendiniams (pavyzdžiui, C^4 klasėje ir prie atitinkamų glodumo reikalavimų (2.16)-(2.18) uždavinio koeficientams) ir tolygiam tinklui yra $\mathcal{O}(h^2)$ eilės. Jeigu kairiajame (dešiniajame) krašte duota antrojo arba trečiojo tipo kraštinė sąlyga, priimsime, kad $P_{-1/2} = 0$ ($P_{n+1/2} = 0$), o jei kairiajame (dešiniajame) krašte yra Dirichlė tipo sąlyga formaliai laikysime, kad $R_0 = 0$ ($R_n = 0$), $F_0 = 0$ ($F_n = 0$), $Q_0 = 0$ ($Q_n = 0$).

4.3.1 lema. *Tegul stacionaraus uždavinio* (2.16)–(2.18) *koeficientai tokie, kad* q, f, $\beta_l \in C^2[0,1]$, $p \in C^3[0,1]$. *Tarkime, kad egzistuoja vienintelis sprendinys* $u \in C^4[0,1]$. *Tegul*

$$h \equiv const, \quad (\delta P)_i = \frac{\partial}{\partial x}p(x_i) + O(h^2),$$

$$\tfrac{1}{2}\big(P_{i+\frac{1}{2}} + P_{i-\frac{1}{2}}\big) = p(x_i) + O(h^2), \quad Q_i = q(x_i) + O(h^2), \quad R_l = r(l) + O(h^2),$$

$$(B_l)_i = \beta_l(x_i) + O(h^2), \quad (\bar{B}_l)_i = \bar{\beta}_l(x_i) + O(h^2),$$

$$G_l = g_l + O(h^2), \quad F_l = f_l + O(h^2), \quad l = 0, 1.$$

Tuomet baigtinių skirtumų schemos (3.19)–(3.21) *aproksimavimo paklaida yra lygi* $\psi = O(h^2)$.

Įrodymas. Kaip žinome [90], (2.16) lygties aproksimavimo paklaida yra $O(h^2)$ eilės dydis. Nelokaliųjų kraštinių sąlygų (2.17)–(2.18) dešinėje pusėje esantys integralai yra skaičiuojami panaudojant trapecijų formulę, todėl aproksimavimo paklaida yra nedidesnė kaip Ch^2, kai funkcija priklauso erdvei $C^2[0,1]$. Tiesinio interpoliavimo paklaida yra $O(h^2)$ [20]. Kraštinės sąlygos tai pat aproksimuotos $O(h^2)$ eile, ir ne Dirichlė kraštinių sąlygų atveju, jų aproksimacijai panaudota pati lygtis. Taigi, bendroji aproksimavimo paklaida yra $O(h^2)$. ■

4.4. Klasikinio uždavinio analizė

Kadangi nelokalioji kraštinė sąlyga gali būti ne Dirichlė tipo, vadinasi negalime tiesiogiai pritaikyti maksimumo principo. Todėl reikalingi energetiniai įverčiai. Kai $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0$, tuomet sprendžiame klasikinius kraštinius uždavinius. Tinklo taškus, kuriuose yra pirmojo tipo kraštinė sąlyga, priskirsime tinklui $\partial\omega \subset \{x_0, x_n\}$. Tada (3.19)-(3.21) skirtumų schemą patogu perrašyti pavidalu

$$\tilde{L}(U) := -\delta(P\delta U) + \tilde{Q}U = \tilde{F}, \qquad x_i \in \omega = \bar{\omega}^h \setminus \partial\omega, \tag{4.22}$$

$$L_\partial(U) := U = G, \qquad x_i \in \partial\omega, \tag{4.23}$$

čia $\tilde{Q} = Q$, $\tilde{F} = F$, kai $x_i \in \omega^h$, ir $\tilde{Q}_i = Q_i + R_i/h_{i+1/2}$, $\tilde{F}_i = F_i + G_i/h_{i+1/2}$ kituose tinklo ω taškuose. Laikysime, kad $P_{-1/2}(\delta U)_{-1/2} = 0$, $P_{n+1/2}(\delta U)_{n+1/2} = 0$. Kai $\partial\omega = \varnothing$, t.y. abi kraštinės sąlygos yra ne pirmojo tipo, apibrėžkime $\bar{U} \equiv 0$. Kitais atvejais $\bar{U}$ bus viena iš trijų funkcijų $\frac{x_i}{L}G_n + \frac{L-x_i}{L}G_0$, $\frac{x_i}{L}G_n$, $\frac{L-x_i}{L}G_0$. Tada funkcija $W = U - \bar{U}$ yra kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} \tilde{L}(W) = -\delta(P\delta W) + \tilde{Q}W = \tilde{F} + \sqrt{\tilde{Q}}\bar{F} - \delta(\sqrt{P}\bar{G}), \quad x \in \omega, \\ L_\partial(W) = 0, \quad x \in \partial\omega, \end{cases} \tag{4.24}$$

su $\bar{F} = \sqrt{\tilde{Q}}\bar{U}$, $\bar{G} = \sqrt{P}\delta\bar{U}$, sprendinys.

Lygtį (4.24) dauginame skaliariškai iš W

$$(W, -\delta(P\delta W)) + (W, \tilde{Q}W) = (W, \tilde{F}) + (W, \sqrt{\tilde{Q}}\bar{F}) - (W, \delta(\sqrt{P}\bar{G})).$$

Integruojame dalimis pirmąjį kairės lygybės pusės narį ir paskutinįjį dešinės lygybės pusės narį (pagal Įvado 7 poskyrio (7.15) formulę), pasinaudodami tuo, kad $W_0 = 0$ arba $P_{-1/2}(\delta U)_{-1/2} = 0$ ir $W_n = 0$ arba $P_{n+1/2}(\delta U)_{n+1/2} = 0$.

$$(\delta W, P\delta W) + (W, \tilde{Q}W) = (W, \tilde{F}) + (W, \sqrt{\tilde{Q}}\bar{F}) + (\delta W, \sqrt{P}\bar{G}). \tag{4.25}$$

Tada (4.24) uždaviniui teisinga energetinė nelygybė

$$\begin{aligned} \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant \|\tilde{F}\|_1 \cdot \|W\|_\infty + \\ + \|\sqrt{P}\delta W\| \cdot \|\bar{G}\| + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\| \cdot \|\bar{F}\|. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Teisingos diskrečiosios Sobolevo įdėties teoremos [17, 90]:

1) $\|W\|_\infty^2 \leqslant (L\|\delta W\|^2 + W_0^2)$;
2) $\|W\|_\infty^2 \leqslant (L\|\delta W\|^2 + W_n^2)$;
3) $\|W\|_\infty^2 \leqslant 2(L\|\delta W\|^2 + \|W\|^2/L)$,

kurios yra teisingos bet kokiai funkcijai. Šias tris nelygybes galima parašyti viena:

$$\|W\|_\infty^2 \leqslant 2(L\|\delta W\|^2 + \min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\}). \tag{4.27}$$

Įvertiname

$$\|\sqrt{P}\delta W\|^2 \geqslant \|\sqrt{p_0}\delta W\|^2 \geqslant p_0\|\delta W\|^2 = \frac{p_0}{L}L\|\delta W\|^2,$$

ir gauname

$$L\|\delta W\|^2 \leqslant \frac{L}{p_0}\|\sqrt{P}\delta W\|^2. \tag{4.28}$$

Kai kraštinės sąlygos yra tik antrojo arba trečiojo tipo, įvertiname normą iš apačios

$$\begin{aligned}\|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 &= \sum_{i=0}^{n} \tilde{Q}_i|W_i|^2 h_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{n} Q_i|W_i|^2 h_{i+\frac{1}{2}} + R_0|W_0|^2 + R_n|W_n|^2\\ &= \|\sqrt{Q}W\|^2 + R_0|W_0|^2 + R_n|W_n|^2 \geqslant q_0\|W\|^2 + R_0|W_0|^2 + R_n|W_n|^2.\end{aligned}$$

Vadinasi, iš šios nelygybės antrojo arba trečiojo tipo sąlygų atvejais, turime įverčius:

$$\begin{aligned} Lq_0\frac{\|W\|^2}{L} &\leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2,\\ R_0|W_0|^2 &\leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2,\\ R_n|W_n|^2 &\leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2.\end{aligned}$$

Pastipriname šias nelygybes

$$\begin{aligned} Lq_0 \min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\} &\leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2,\\ R_0 \min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\} &\leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2,\\ R_n \min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\} &\leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2,\end{aligned}$$

ir užrašome jas viena nelygybe

$$\max\{Lq_0, R_0, R_n\} \cdot \min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\} \leqslant \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2,$$

t.y.

$$\min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\} \leqslant \frac{1}{\max\{Lq_0, R_0, R_n\}}\|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2. \tag{4.29}$$

Iš (4.28) ir (4.29) seka

$$\begin{aligned}L\|\delta W\|^2 + \min\{W_0^2, W_n^2, \|W\|^2/L\} &\leqslant \frac{L}{p_0}\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \\ &+ \frac{1}{\max\{Lq_0, R_0, R_n\}}\|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant \\ &\leqslant (\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2)\Big(\frac{L}{p_0} + \frac{1}{\max\{Lq_0, R_0, R_n\}}\Big).\end{aligned}$$

Iš (4.27) gauname, kad

$$\begin{aligned}\|W\|_\infty^2 &\leqslant 2(L\|\delta W\|^2 + \min\{W_0^2, W_n^2, \frac{\|W\|^2}{L}\}) \leqslant \\ &\leqslant 2\Big(\frac{L}{p_0} + \frac{1}{\max\{Lq_0, R_0, R_n\}}\Big)(\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}\|W\|_\infty^2 &+ \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big[2\Big(\frac{L}{p_0} + \frac{1}{\max\{Lq_0, R_0, R_n\}}\Big) + 1\Big](\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2).\end{aligned}$$

Pažymime $C_0(P, Q, R) := 2\Big(\frac{L}{p_0} + \frac{1}{\max\{Lq_0, R_0, R_n\}}\Big) + 1$. Tada

$$\begin{aligned}\|W\|_\infty^2 &+ \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant \\ &\leqslant C_0(P, Q, R)\big(\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2\big).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Jei (4.22)–(4.23) uždavinyje yra bent viena pirmojo tipo kraštinė sąlyga, t.y., $\partial\omega \neq \varnothing$, tada galime imti Sobolevo įdėties teoremoje ((4.27) formulė) $W_0 = 0$ arba $W_n = 0$ ir įvertinti

$$\|W\|_\infty^2 \leqslant 2L\|\delta W\|^2 \leqslant \frac{2L}{p_0}\|\sqrt{P}\delta W\|^2.$$

Įvertiname

$$\|W\|_\infty^2 + \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant \Big(\frac{2L}{p_0} + 1\Big)\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \\ + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant \max\Big\{\frac{2L}{p_0} + 1, 1\Big\}(\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2),$$

t.y. šiuo atveju teisingas (4.31) įvertis su $C_0 = C_0(P) = \max\Big(\frac{2L}{p_0} + 1, 1\Big)$. Pasinaudoję (4.31) ir (4.26), gauname

$$\|W\|_\infty^2 + \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant C_0(P,Q,R)\big(\|\tilde{F}\|_1 \cdot \|W\|_\infty + \\ + \|\sqrt{P}\delta W\| \cdot \|\bar{G}\| + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\| \cdot \|\bar{F}\|\big). \tag{4.32}$$

Įvertiname, pasinaudodami ε-nelygybe $\big(ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2\big)$, kai $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$C_0\|\tilde{F}\|_1 \cdot \|W\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|W\|_\infty^2 + \bar{C}\|\tilde{F}\|_1^2,$$
$$C_0\|\sqrt{P}\delta W\| \cdot \|\bar{G}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \bar{C}\|\bar{G}\|^2,$$
$$C_0\|\sqrt{\tilde{Q}}W\| \cdot \|\bar{F}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 + \bar{C}\|\bar{F}\|^2,$$

čia $\bar{C} = \bar{C}(C_0(P,Q,R))$. Įstatę šiuos įvečius į (4.32), gauname

$$\|W\|_\infty^2 + \|\sqrt{P}\delta W\|^2 + \|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2 \leqslant C_1(\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\bar{G}\|^2 + \|\bar{F}\|^2), \tag{4.33}$$

čia $C_1 = 2\bar{C}$. Tada,

$$\|W\|_\infty^2 + \|\sqrt{P}\delta W\|^2 \leqslant C_1(\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\bar{G}\|^2 + \|\bar{F}\|^2).$$

Kadangi, $\|\delta W\|^2 \leqslant \frac{1}{p_0}\|\sqrt{P}\delta W\|^2$ ir $\|W\|^2 \leqslant \frac{1}{q_0}\|\sqrt{\tilde{Q}}W\|^2$, tai

$$\|W\|_\infty^2 + \|\delta W\|^2 \leqslant C_2(P,Q,R)(\|\tilde{F}\|_1^2 + \|\bar{G}\|^2 + \|\bar{F}\|^2).$$

Galutinis įvertis

$$\|W\|_\infty + \|\delta W\| \leqslant C_3(P,Q,R)(\|\tilde{F}\|_1 + \|\bar{G}\| + \|\bar{F}\|). \tag{4.34}$$

Grįžkime prie funkcijos U įverčių. Kadangi $U = W + \bar{U}$, todėl $\|U\|_\infty \leqslant \|W\|_\infty + \|\bar{U}\|_\infty$ ir $\|\delta U\| \leqslant \|\delta W\| + \|\delta\bar{U}\|$. Jei nėra pirmojo tipo kraštinių sąlygų,

$\bar{U} \equiv 0$, t.y. šiuo atveju iš (4.34) formulės gauname U įvertį. Kitais atvejais $\bar{U}$ normas įvertiname per G_0, G_1 reikšmes

$$\|\bar{U}\|_\infty \leqslant C_4(L)\max\{G_0, G_1\} = C_4(L)\|G\|_\infty,$$
$$\|\delta\bar{U}\| \leqslant C_5(L)\max\{G_0, G_1\} = C_5(L)\|G\|_\infty.$$

Taip pat įvertiname

$$\|\tilde{F}\|_{1,\omega} = \sum_{i=0}^{n} |F_i| h_{i+1/2} + |G_0| + |G_n| \leqslant \|F\|_1 + 2\|G\|_\infty,$$
$$\|\tilde{Q}\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |Q_i| h_{i+1/2} + |R_0| + |R_n| \leqslant \|Q\|_1 + 2\|R\|_\infty.$$

Tada,

$$\begin{aligned} \|U\|_\infty + \|\delta U\| &\leqslant C(\|\tilde{F}\|_1 + \|\sqrt{P}\delta\bar{U}\| + \|\sqrt{\tilde{Q}}\bar{U}\|) + \|\bar{U}\|_\infty + \|\delta\bar{U}\| \leqslant \\ &\leqslant C(\|\tilde{F}\|_1 + \|\sqrt{P}\|_\infty\|\delta\bar{U}\| + \sqrt{\|\tilde{Q}\|_1}\|\bar{U}\|_\infty) + \|\bar{U}\|_\infty + \|\delta\bar{U}\| \leqslant \\ &\leqslant C_6(P, Q, R)(\|F\|_1 + \|G\|_\infty). \end{aligned} \tag{4.35}$$

4.4.1 lema. Uždavinio su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis stabilumas. *Jeigu $P \leqslant p_1$, $\|Q\|_1 \leqslant q_1$, tuomet* (3.19)–(3.21) *uždaviniui teisingas stabilumo įvertis*

$$\|U\|_E := \|U\|_\infty + \|\delta U\| \leqslant \bar{C}(P, Q, R)(\|F\|_1 + \|G\|_\infty). \tag{4.36}$$

4.4.1 *pastaba.* Konstanta $\bar{C}$ priklauso nuo parametrų p_0, p_1, q_0, q_1, R_0, R_N, L.

4.4.1 *išvada.* Jei išpildytos (4.4.1) lemos sąlygos ir $\|F\|_1 < \infty$, $\|G\|_\infty < \infty$, tuomet $\|U\|_E \leqslant C_K$.

4.4.2 *pastaba.* Diferencialiniam uždaviniui teisingas analogiškas stabilumo įvertis.

Žymėsime $\|g\|_\infty = \max\{|g_0|, |g_1|\}$.

4.4.2 lema. *Jeigu $p \leqslant p_1$, $\|q\|_1 \leqslant q_1$, tuomet* (2.16)–(2.18) *uždaviniui teisingas stabilumo įvertis*

$$\|u\|_E := \|u\|_C + \|u\|_{W_2^1} \leqslant \bar{C}(p, q, r)(\|f\|_1 + \|g\|_\infty).$$

Įrodymas. Kaip ir diskrečiuoju atveju, priklausomai nuo kraštinių sąlygų pasirenkame pagalbinę funkciją: $\bar{u} \equiv 0$, $\bar{u} = \frac{x}{L} g_1 + \frac{L-x}{L} g_0$, $\bar{u} = \frac{x}{L} g_1$, $\bar{u} = \frac{L-x}{L} g_0$. Tada funkcija $w = u - \bar{u}$ yra šio uždavinio sprendinys

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + qw &= \bar{f} + \sqrt{q}\bar{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{p}\bar{g}), \\ L_0(w) &= d_0, \\ L_1(w) &= d_1, \end{aligned} \tag{4.37}$$

čia $\bar{f} = \sqrt{q}\bar{u}$, $\bar{g} = \sqrt{p}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}$, $d_0 = g_0 - L_0(\bar{u})$, $d_1 = g_1 - L_1(\bar{u})$.

Jeigu krašte l duota pirmojo tipo kaštinė sąlyga, tuomet $d_l \equiv 0$, priešingu atveju, įvertiname

$$|d_l| \leqslant |g_l - L_l(\bar{u})| \leqslant |g_l| + |L_l(\bar{u})| \leqslant C_0(p, r)\|g\|_\infty,$$

t.y.

$$|L_l(w)| \leqslant C_0(p, r)\|g\|_\infty. \tag{4.38}$$

Daugindami (4.37) lygtį skaliariškai iš w erdvėje L_2, gauname

$$\Big(w, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Big)\Big) + (w, qw) = (w, \bar{f}) + (w, \sqrt{q}\bar{f}) - \Big(w, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{p}\bar{g})\Big).$$

Integruodami dalimis, turime

$$\Big(w, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Big)\Big) = \Big(p\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Big) + p(0)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(0)w(0) - p(L)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(L)w(L).$$

Jeigu uždavinyje kraštinė sąlyga yra pirmojo tipo, šios lygybės dešinėje pusėje nėra atitinkamo nario (antrojo arba trečiojo), kitais atvejais

$$\begin{aligned} p(0)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(0)w(0) &= r(0)w^2(0) - L_0(w)w(0), \\ -p(L)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(L)w(0) &= r(L)w^2(L) - L_1(w)w(L). \end{aligned}$$

Analogiškai,

$$\Big(w, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{p}\bar{g})\Big) = \Big(\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \bar{g}\Big) + \sqrt{p(0)}\bar{g}(0)w(0) - \sqrt{p(L)}\bar{g}(L)w(L).$$

Tada (4.37) uždaviniui teisinga lygybė

$$\begin{aligned} &\Big\|\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Big\|^2 + \|\sqrt{q}w\|^2 + r(0)w^2(0) + r(L)w^2(L) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \|\tilde{f}\|_1 \cdot \|w\|_C + \|\sqrt{q}w\| \cdot \|\bar{f}\| + \Big\|\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\Big\| \cdot \|\bar{g}\| + \\ &\qquad + \big(\sqrt{p(0)}|\bar{g}(0)| + |L_0(w)|\big)|w(0)| + \big(\sqrt{p(L)}|\bar{g}(L)| + |L_1(w)|\big)|w(L)|. \end{aligned}$$

Kairioji šios nelygybės pusė „sutampa“su (4.26) diskrečiosios nelygybės kairiąja puse. Todėl pasinaudodami įdėjimo teoremomis, gauname įvertį analogišką (4.31) įverčiui, t.y.

$$\|w\|_C^2 + \left\|\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right\|^2 + \|\sqrt{q}w\|^2 + r(0)w^2(0) + r(L)w^2(L) \leqslant$$
$$\leqslant C_0(p,q,r)\Big(\left\|\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right\|^2 + \|\sqrt{q}w\|^2 + r(0)w^2(0) + r(L)w^2(L)\Big).$$

Toliau gauname įvertį analogišką įverčiui (4.33):

$$\|w\|_C^2 + \left\|\sqrt{p}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right\|^2 + \|\sqrt{q}w\|^2 + r(0)w^2(0) + r(L)w^2(L) \leqslant$$
$$\leqslant C_1(\|g\|_\infty^2 + \|\bar{g}\|^2 + \|\bar{f}\|^2 + \|f\|_1^2),$$

iš šios nelygybės išplaukia

$$\|w\|_C^2 + \|w\|^2 + \left\|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right\|^2 \leqslant \bar{C}(\|f\|_1^2 + \|g\|_\infty^2).$$

Dabar nesunkiai gaunamas ir lemos įvertis. ■

Darbuose [22, 95] pasiūlytas nelokaliųjų uždavinių tyrimo metodas, kuriuo kraštinio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis sprendinio ieškoma kaip fundamentaliųjų sprendinių tiesinio darinio. Fundamentaliaisiais vadinsime klasikinius sprendinius Φ_0 ir Φ_1 su $G_0 = 1$, $G_1 = 0$ ir $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, atitinkamai (4.1 paveikslas, įvairių kraštinių sąlygų atvejais):

$$\begin{cases} L(\Phi_0) = 0, \\ L_0(\Phi_0) = 1, \\ L_1(\Phi_0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L(\Phi_1) = 0, \\ L_0(\Phi_1) = 0, \\ L_1(\Phi_1) = 1. \end{cases} \tag{4.39}$$

Iš lokalaus maksimumo principo [22] gauname fundamentaliųjų sprendinių savybes.

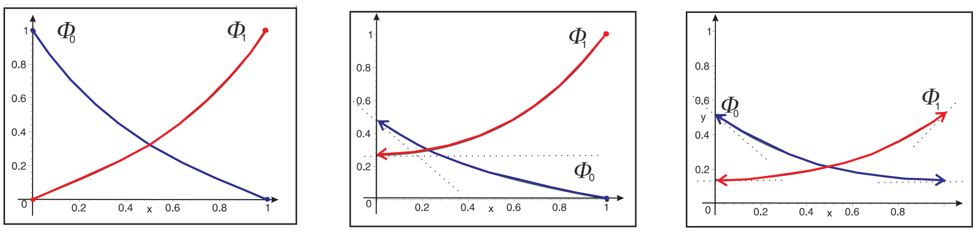
4.4.3 lema. *Fundamentaliesiems sprendiniams teisingos savybės:*

1) $\varPhi_0$ *yra nedidėjanti funkcija*, $\varPhi_1$ *– nemažėjanti funkcija*;

2) $0 \leqslant \varPhi_0,\ 0 \leqslant \varPhi_1,\ \varPhi_0 + \varPhi_1 \leqslant 1,$ *jei yra pirmojo tipo kraštinė sąlyga*,
$0 < \varPhi_i \leqslant \varPhi_0 + \varPhi_1 \leqslant C_\varPhi := \bar{C}(P,Q,R),$ *jei nėra pirmojo tipo kraštinių sąlygų*,

3) $\|\varPhi_0\|_E, \|\varPhi_1\|_E \leqslant C_\varPhi$.

Jei turime uždavinį su pirmojo tipo kraštinėmis sąlygomis, tai maksimumo principas dalinai išlieka (4.1 paveikslas, a)). Jei kraštinės sąlygos yra antrojo (4.1



a) b) c)

4.1 pav. Fundamentalieji sprendiniai

paveikslas, b), kai antrojo tipo sąlyga yra kairiajame krašte, c) kai abi kraštinės sąlygos yra antrojo tipo) arba trečiojo tipo maksimumo principo taikyti negalime. Šiame skyriuje aprašyta teorija (paremta energetiniais įverčiais) tinka visų trijų tipų kraštinėms sąlygoms.

4.4.3 *pastaba.* Diferencialiniam uždaviniui lieka teisinga 4.4.3 lema, tik fundamentaliojo sprendinio apibrėžime (4.39) reikia imti diferencialinius operatorius, o 4.4.3 lemoje $C_\Phi = \bar{C}(p,q,r)$, ir imama atitinkama norma $\|u\|_E = \|u\|_C + \|u\|_{W_2^1}$.

4.5. Stabilumo analizė nelokaliajam uždaviniui

Stacionariojo (3.19)-(3.21) uždavinio (arba atitinkamo diferencialinio uždavinio (2.16)–(2.18)) su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendinio ieškokime pavidalu $U = U_K + y_0\Phi_0 + y_1\Phi_1$, čia U_K yra (3.19)-(3.21) klasikinio kraštinio uždavinio sprendinys

$$\begin{cases} L(U_K) = F, \\ L_0(U_K) = G_0, \\ L_1(U_K) = G_1, \end{cases}$$

arba atitinkamo diferencialinio uždavinio

$$\begin{cases} L(U_K) = f, \\ L_0(U_K) = g_0, \\ L_1(U_K) = g_1 \end{cases}$$

sprendinys. Diferencialiniu atveju funkcijos $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, $U_K(x)$ yra apibrėžtos $x \in [0,1]$,o diskrečiuoju $x \in \bar{\omega}^h$. Tada koeficientai y_0 ir y_1 randami sprendžiant dviejų algebrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} y_0 = \gamma_0 < K_0, \Phi_0 > y_0 + \gamma_0 < K_0, \Phi_1 > y_1 + \gamma_0 < K_0, U_K >, \\ y_1 = \gamma_1 < K_1, \Phi_0 > y_0 + \gamma_1 < K_1, \Phi_1 > y_1 + \gamma_1 < K_1, U_K > . \end{cases} \tag{5.40}$$

Apibrėžkime matricas ir vektorius

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < K_0, \Phi_0 > & < K_0, \Phi_1 > \\ < K_1, \Phi_0 > & < K_1, \Phi_1 > \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}(x) := \big(\Phi_0(x)\ \Phi_1(x)\big),$$

$$\mathbf{G} := \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \gamma_0 < K_0, U_K > \\ \gamma_1 < K_1, U_K > \end{pmatrix}.$$

Šių matricų išraiškos visiškai sutampa su tomis, kurios apibrėžtos, šio skyriaus įvade. Lygčių sistema (5.40) perrašoma matriciniu pavidalu

$$\mathbf{AY} = \mathbf{F}, \tag{5.41}$$

čia $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{GK}$.

Naudosime standartines vektorių ir matricų normas:

$$\|\mathbf{Y}\|_\infty := \max\{|y_0|, |y_1|\}, \qquad \|\mathbf{A}\|_\infty := \max\{|a_{00}| + |a_{01}|, |a_{10}| + |a_{11}|\},$$
$$\|\mathbf{Y}\|_1 := |y_0| + |y_1|, \qquad \|\mathbf{A}\|_1 := \max\{|a_{00}| + |a_{10}|, |a_{01}| + |a_{11}|\}.$$

Turime įverčius (4.4.3 lema):

$$\max_l\{\Phi_l\} \leqslant C_\Phi,\ l = 0, 1, \tag{5.42}$$

$$\Phi_0 + \Phi_1 \leqslant C_\Phi, \tag{5.43}$$

$$\|\varPhi_0\|_E, \|\varPhi_1\|_E \leqslant C_\Phi, \tag{5.44}$$

čia $C_\Phi \geqslant 1$.

Matricos $\mathbf{K}$ normos yra lygios:

$$\|\mathbf{K}\|_\infty = \max_l\{| < K_l, \Phi_0 > | + | < K_l, \Phi_1 > |\},$$
$$\|\mathbf{K}\|_1 = \max_l\{| < K_0, \Phi_l > | + | < K_1, \Phi_l > |\},$$

čia $l = 0, 1$.

Kai yra žinomi fundamentalieji sprendiniai ir surasti koeficientai y_0, y_1, tai galime rasti tiesinių lygčių sistemos (5.40) sprendinį

$$U(x) = U_K(x) + \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{Y}.$$

Pažymėkime

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}. \tag{5.45}$$

Suformuluosime keletą lemų iš [22] straipsnio, truputį jas modifikuodami.

4.5.1 lema. *Tegul matrica* $\mathbf{A}$ *tenkina sąlygą* $\det\mathbf{A} \neq 0$. *Tuomet teisingi įverčiai*

$$\|\mathbf{Y}\|_\infty \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_\infty, \quad \|\mathbf{Y}\|_1 \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_1,$$

.

Įrodymas.[22] Vienintelis (5.41) sistemos sprendinys egzistuoja, kai $\det\mathbf{A} \neq 0$ ir tada

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}, \text{ čia } \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ -a_{10} & a_{00} \end{pmatrix}.$$

Matricos $\mathbf{A}^{-1}$ normos išreiškiamos per matricos $\mathbf{A}$ normas:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \frac{\|A\|_1}{|\det\mathbf{A}|}, \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = \frac{\|A\|_\infty}{|\det\mathbf{A}|}.$$

Tuomet,

$$\|\mathbf{Y}\|_\infty \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{F}\|_\infty = \frac{\|A\|_1}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_\infty,$$
$$\|\mathbf{Y}\|_1 \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \|\mathbf{F}\|_1 = \frac{\|A\|_\infty}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_1.$$

■

4.5.2 lema. *Funkcijai* $\mathbf{V}(x)$, *kuri yra išreikšta* (5.45) *formule, teisingi įverčiai:*

$$\|\mathbf{V}(x)\|_E \leqslant C_\Phi \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_1, \quad \|\mathbf{V}(x)\|_E \leqslant 2C_\Phi \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_\infty.$$

Įrodymas. Kadangi, $\mathbf{V}(x) = \Phi_0(x)y_0 + \Phi_1(x)y_1$. Tuomet, pasinaudoję 4.4.3 lema (arba (5.42)–(5.44) įverčiais), gauname

$$\|\mathbf{V}(x)\|_E \leqslant |y_0|\cdot\|\Phi_0(x)\|_E + |y_1|\cdot\|\Phi_1(x)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} C_\Phi\|\mathbf{Y}\|_1 \leqslant C_\Phi \frac{\|\mathbf{A}\|_\infty}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_1, \\ 2C_\Phi\|\mathbf{Y}\|_\infty \leqslant 2C_\Phi \frac{\|\mathbf{A}\|_1}{|\det\mathbf{A}|}\,\|\mathbf{F}\|_\infty. \end{cases}$$

■

Straipsnyje [22] parodyta, kad (5.41) sistemos išsprendžiamumą apibrėžia sąlyga $\det\mathbf{A} \neq 0$:

$$\theta := 1 - \gamma_0 k_{00} - \gamma_1 k_{11} + \gamma_0\gamma_1 \det\mathbf{K} \neq 0, \tag{5.46}$$

o uždavinio stabilumas garantuojamas srityje Ω_+^ε ((1.12), (1.13)).

Įvertiname $\|\mathbf{A}\|_\infty$ ir $\|\mathbf{A}\|_1$ normas:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{I} - \mathbf{GK}\|_\infty \leqslant 1 + \max\{\gamma_0, \gamma_1\}\|\mathbf{K}\|_\infty,$$
$$\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{I} - \mathbf{GK}\|_1 \leqslant 1 + (\gamma_0 + \gamma_1)\|\mathbf{K}\|_1.$$

Pasinaudoję 4.5.2 lemos įverčiais, gauname:

$$\|\mathbf{V}\|_E \leqslant \frac{C_\Phi\big(1 + \max\{\gamma_0, \gamma_1\} \max\limits_l\{| < K_l, \Phi_0 > | + | < K_l, \Phi_1 > |\}\big)}{|\theta|}\|\mathbf{F}\|_1,$$
$$\|\mathbf{V}\|_E \leqslant \frac{2C_\Phi\big(1 + (\gamma_0 + \gamma_1) \max\limits_l\{| < K_0, \Phi_l > | + | < K_1, \Phi_l > |\}\big)}{|\theta|}\|\mathbf{F}\|_\infty.$$

Sakykime, $\sum_{j=1}^J |\alpha^j| + \|B\|_1 + \|\overline{B}\| < \infty$. Pasinaudodami (4.36) nelygybe, įvertiname funkcionalą

$$|(< K_l, U_K >)| \leqslant \big(\sum_{j=1}^J |\alpha_l^j| + \|B_l\|_1\big)\|U_K\|_\infty + \|\overline{B}_l\| \cdot \|\delta U_K\| \leqslant C\|U_K\|_E,$$

čia $l = 0, 1$. Atskiru atveju pirmoji nelygybė teisinga ir fundamentaliesiems sprendiniams:

$$| < K_l, \Phi_i > | \leqslant \Big(\sum_{j=1}^J |\alpha_l^j| + \|B_l\|_1\Big)\|\varPhi_i\|_\infty + \|\bar{B}_l\| \cdot \|\delta\varPhi_i\| \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|\Phi_i\|_E \leqslant C_1 C_\Phi, \tag{5.47}$$

čia $l = 0, 1$, $i = 0, 1$.

Įvertiname

$$\|\mathbf{F}\|_1 = \gamma_0| < K_0, U_K > | + \gamma_1| < K_1, U_K > | \leqslant$$
$$\leqslant C_{F1}(\gamma_0 + \gamma_1)\|U_K\|_E, \tag{5.48}$$
$$\|\mathbf{F}\|_\infty = \max\{\gamma_0| < K_0, U_K > |, \gamma_1| < K_1, U_K > |\} \leqslant$$
$$\leqslant C_{F2} \max\{\gamma_0, \gamma_1\}\|U_K\|_E. \tag{5.49}$$

Čia $C_{Fl} := C(\alpha_l, B_l, \bar{B}_l)$, $l = 0, 1$. Tuomet, pasinaudojus (5.47), (5.48) ir (5.49), gauname

$$\|\mathbf{V}\|_E \leqslant |\theta|^{-1} C_\Phi C_{F1}\big(1 + 2\max\{\gamma_0, \gamma_1\}C_1 C_\Phi\big)(\gamma_0 + \gamma_1)\|U_K\|_E,$$
$$\|\mathbf{V}\|_E \leqslant 2|\theta|^{-1} C_\Phi C_{F2}\big(1 + 2(\gamma_0 + \gamma_1)C_1 C_\Phi\big) \max\{\gamma_0, \gamma_1\}\|U_K\|_E.$$

Tada srityje Ω^{ε}_{+}, teisingas įvertis energetinėje normoje

$$\|\mathbf{V}\|_E \leqslant 2\varepsilon^{-2}C_{\Phi}C_{F1}\big(1+2\varepsilon^{-1}C_1C_{\Phi}\big)\|U_K\|_E,$$
$$\|\mathbf{V}\|_E \leqslant 2\varepsilon^{-2}C_{\Phi}C_{F2}\big(1+4\varepsilon^{-1}C_1C_{\Phi}\big)\|U_K\|_E.$$

Pažymėkime

$$C_\varepsilon := \min\big\{2\varepsilon^{-2}C_{\Phi}C_{F1}\big(1+2\varepsilon^{-1}C_1C_{\Phi}\big), 2\varepsilon^{-2}C_{\Phi}C_{F2}\big(1+4\varepsilon^{-1}C_1C_{\Phi}\big)\big\}+1,$$

tuomet

$$\|V\|_E \leqslant (C_\varepsilon - 1)\|U_K\|_E.$$

Grįžkime prie lygčių sistemos (5.40) sprendinio įverčių

$$\|U\|_E \leqslant \|U_K\|_E + \|V\|_E \leqslant \|U_K\|_E + (C_\varepsilon - 1)\|U_K\|_E \leqslant C_\varepsilon\|U_K\|_E. \quad (5.50)$$

4.5.1 teorema. Uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumas. *Sakykime,* $(\gamma_0,\gamma_1) \in \Omega^{\varepsilon}_{+}$, $\sum_{j=1}^{J}|\alpha_0^j| + \|B_0\|_1 + \|\overline{B}_0\| + \|Q\|_1 < \infty$, $\sum_{j=1}^{J}|\alpha_1^j| + \|B_1\|_1 + \|\overline{B}_1\| + \|Q\|_1 < \infty$, $R < \infty$, $0 < p_0 \leqslant P \leqslant p_1 < \infty$, $0 \leqslant q_0 \leqslant Q$. *Tada teisingas uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumo įvertis*

$$\|U\|_E \leqslant C(\|G\| + \|F\|_1). \quad (5.51)$$

Įrodymas išplaukia iš (5.50) ir energetinio įverčio (4.36) klasikiniam uždaviniui.

4.5.1 *pastaba.* Teiginys teisingas tiek diskrečiajam, tiek diferencialiniam uždaviniui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

4.5.1 *išvada.* Tolygaus tinklo atveju teisingas skirtumų schemos konvergavimo įvertis

$$\|U-u\|_\infty = \mathcal{O}(h^2)$$

glodiems u.

4.6. Pagrindiniai skyriuje gauti rezultatai

- Sukonstruotos $O(h^2)$ eilės baigtinių skirtumų schemos stacionariajam uždaviniui su įvairių tipų nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.
- Gautas uždavinio su įvairaus tipo klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis stabilumas energetinėje normoje.
- Gautas uždavinio su įvairių tipų nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumas pagal energetinę normą.
- Gautas diskrečiojo sprendinio konvergavimas į diferencialinio uždavinio pakankamai glodų sprendinį.

5 skyrius

Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis suvedimas į integralinę lygtį

5.1. Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis suvedimas į integralinę lygtį

Parabolinių uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendimas yra gana plačiai nagrinėjamas. Parašyta nemažai straipsnių tiek diferencialinių lygčių, tiek skaitmeninių metodų srityse, nagrinėjančių šiuos uždavinius įvairiais aspektais.

M. Sapagovas ir R. Čiegis [95] surado būtinas ir pakankamas stacionariojo uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygas, kai viena kraštinė sąlyga yra nulinė, o kita nelokalioji Samarskio ir Bitsadzės tipo.

Greta diferencialinio uždavinio teorinių klausimų buvo lygiagrečiai konstruojamos baigtinių skirtumų, baigtinių elementų aproksimacijos stacionariesiems ir paraboliniams uždaviniams. Stacionariajam ir paraboliniam uždaviniu su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis buvo sukonstruotos baigtinių skirtumų schemos, kurioms buvo surastos pakankamos (stacionariajam uždaviniui ir būtinos) diskrečiojo sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygos, bei įrodytas išreikštinės ir neišreikštinės schemų stabilumas ir konvergavimas [22, 23] (plačiau 4 skyriaus 1 poskyryje).

Šiame disertacijos skyriuje pažvelgsime į parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sprendimą kitaip. Nagrinėkime modelinį parabolinį uždavinį su viena nelokaliąja, o kita – taškine kraštine sąlyga. Tada nelokaliąja sąlyga galima suvesti į Volteros tipo integralinę lygtį. Radę šios integralinės lygties sprendinį, surandame uždavinio su nelokaliąja kraštine sąlyga reikšmes kraštiniame taške, kuris buvo susietas nelokaliąja sąlyga. Vadinasi, turime ieškomojo sprendinio reikšmes kraštiniuose srities taškuose ir galime spręsti klasikinį uždavinį. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai paskelbti [8A] straipsnyje.

Volteros tipo integralinių lygčių sprendimo metodai yra plačiai išnagrinėti estų mokslininkų darbuose [84, 104]. P. Oja ir D. Saveljeva [84] nagrinėja Volteros integralinę lygtį

$$y(t) = \int_0^t K(t, s, y(s))\mathrm{d}s + f(t), \quad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

kai funkcija $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, $K : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o aibė $S = \{(t, s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$. Tyrimas yra paremtas nagrinėjamų funkcijų skleidinių B–splainais koeficientų įvertinimu. Volteros integralinė lygtis ir pradinė sąlyga pakeičiamos netaškine kraštine sąlyga kitame intervalo gale. Gaunama tiesinių lygčių sistema, kurią nesunkai galima išspręsti Gauso metodu. Toks metodas yra stabilus toje pačioje srityje, kaip ir žingsnis po žingsnio (step-by-step) metodas naudojant tiesinius splainus.

M. Tarang [104] straipsnyje taip pat nagrinėja (1.1) Volteros integralinės lygties, kai branduolys $K = K(t, s, y'(s), y(s))$ ir funkcija $f = f(t,\ y'(t), y(t))$, stabilumą. Šiame straipsnyje surastas ryšys tarp atitinkamų pirmosios ir antrosios eilės Volteros integralinių lygčių sprendimo teorijų.

5.2. Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime modelinį parabolinį uždavinį su nelokaliąja kraštine sąlyga kairiajame intervalo $(0, 1)$ krašte ir taškine sąlyga dešiniajame krašte ($c > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{2.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2.3}$$

$$u(0, t) = \gamma u(\xi, t) + d(t),\ \xi \in [0, 1], \tag{2.4}$$

$$u(1, t) = \mu(t) \tag{2.5}$$

ir klasikinį uždavinį

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{2.6}$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \tag{2.7}$$

$$w(0, t) = z(t), \tag{2.8}$$

$$w(1, t) = \mu(t), \tag{2.9}$$

čia $\gamma \in \mathbb{R}$, o $z(t) = u(0, t)$ yra nežinoma funkcija. Jeigu surandama ši funkcija, tuomet, sprendžiant klasikinį uždavinį, surandamas ir nelokaliojo kraštinio uždavinio sprendinys.

5.3. Parabolinio kraštinio uždavinio sprendinys

Klasikinio parabolinio kraštinio uždavinio sprendinį galima išreikšti per Gryno funkciją [12, 89]:

$$u(x,t) = \int_0^1 \varphi(y)G(x,y,t)\mathrm{d}y + \int_0^t\int_0^1 f(y,\tau)G(x,y,t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau$$
$$+ c^2\int_0^t z(\tau)H(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau - c\int_0^t \mu(\tau)H_1(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (3.10)$$

čia

$$H(x,t) = \frac{\partial}{\partial y}G(x,y,t)\Big|_{y=0}, \quad H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial y}G(x,y,t)\Big|_{y=1}.$$

Šiam uždaviniui galima išrašyti dvi Gryno funkcijos išraiškas [12, 89]:

$$\tilde{G}(x,y,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x)\exp(-n^2\pi^2 t) = \qquad (3.11)$$

$$\tilde{\tilde{G}}(x,y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c^2 t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\exp\Big\{-\frac{(x-y+2n)^2}{4c^2t}\Big\}-$$
$$-\exp\Big\{-\frac{(x+y+2n)^2}{4c^2t}\Big\}\Big\}, \qquad (3.12)$$

ir jų artinius

$$\tilde{G}_N(x,y,t) = 2\sum_{n=1}^{N}\sin(n\pi x)\exp(-n^2\pi^2 t) =$$

$$\tilde{\tilde{G}}_N(x,y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c^2 t}}\sum_{n=-N}^{N}\Big\{\exp\Big\{-\frac{(x-y+2n)^2}{4c^2t}\Big\}-$$
$$-\exp\Big\{-\frac{(x+y+2n)^2}{4c^2t}\Big\}\Big\}.$$

Šios eilutės konverguoja, ir jų konvergavimui teisingi įverčiai [12]:

$$|\tilde{R}_N(x,y,t)| = |\tilde{G}_N(x,y,t) - \tilde{G}(x,y,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi c^2 t}}\Big\{1 - \mathrm{erf}(N\pi\sqrt{c^2 t})\Big\},$$
$$0 \leqslant x, y \leqslant 1,\ 0 < t < +\infty, \tag{3.13}$$
$$|\tilde{\tilde{R}}_N(x,y,t)| = |\tilde{\tilde{G}}_N(x,y,t) - \tilde{\tilde{G}}(x,y,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi c^2 t}} \exp - \frac{(N-1)^2}{c^2 t} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi c^2 t^*}} \exp\Big\{-\frac{(N-1)^2}{c^2 t^*}\Big\}, 0 \leqslant x, y \leqslant 1,\ 0 < t < t^*,$$
$$N \geqslant \sqrt{\frac{c^2 t^*}{2}} + 1. \tag{3.14}$$

Ieškomas (2.2)–(2.5) uždavinio sprendinys (3.10) pavidalu. Tada nelokalioji kraštinė sąlyga suvedama į antrojo tipo Volteros integralinę lygtį

$$z(t) = \gamma c^2 \int_0^t z(\tau) H(\xi, t-\tau)\mathrm{d}\tau + F(t), \tag{3.15}$$

$$F(t) = d(t) + \gamma \int_0^1 \varphi(y) G(\xi, y, t)\mathrm{d}y + \gamma \int_0^t \int_0^1 f(y,t) G(\xi, t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau -$$
$$-\gamma c^2 \int_0^t \mu(\tau) H_1(\xi, t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Vietoje (3.15) lygties skaitiniais metodais sprendžiama lygtis

$$z(t) = \gamma c^2 \int_0^t z(\tau) H_N(\xi, t-\tau)\mathrm{d}\tau + F_N(t), \tag{3.16}$$

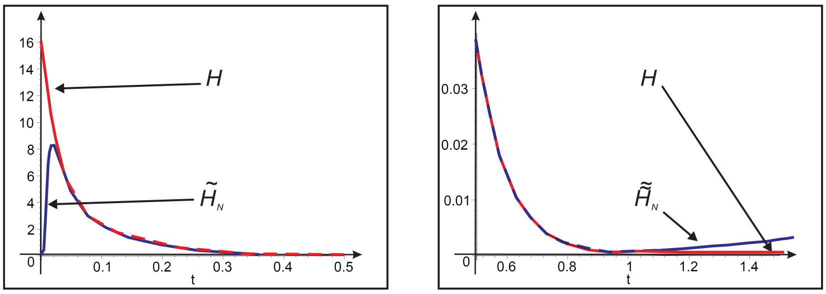
čia

$$F_N(t) = d(t) + \gamma \int_0^1 \varphi(y) G_N(\xi, y, t)\mathrm{d}y + \gamma \int_0^t \int_0^1 f(y,\tau) G_N(\xi, y, t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau -$$
$$-\gamma c^2 \int_0^t \mu(\tau) H_{N,1}(\xi, t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

o

$$H_N(x,t) = \frac{\partial}{\partial y} G_N(x,y,t)\Big|_{y=0}, \quad H_{N,1}(x,t) = \frac{\partial}{\partial y} G_N(x,y,t)\Big|_{y=1}.$$

Iš (3.13)–(3.14) įverčių matome, kad (3.12) eilutė tolygiai konverguoja intervale $\big[0, t^*\big]$, o (3.11) - $\big[t^*, +\infty\big]$, kai $N \to \infty$. Ieškant (3.15) integralinės lygties



$\tilde{H}_N(1/3, t)$ $\quad$ $\tilde{\tilde{H}}_N(1/3, t)$

5.1 pav. Branduoliai $\tilde{H}_N(1/3, t)$ ir $\tilde{\tilde{H}}_N(1/3, t)$

sprendinio reikalingas branduolys $H(\xi, t)$, o jos aproksimacijai (3.16) - $H_N(\xi, t)$. Pastarojo grafikai pateikti 5.1 paveiksle. Atsižvelgus į (3.11) ir (3.12) eilučių tolygaus konvergavimo intervalus, ieškant Gryno funkcijos artinio mažiems t reikia skaičiuoti pagal (3.12) formulę, o dideliems t - pagal (3.11) formulę. Priklausomybė nuo parametro ξ pavaizduota 5.2 paveiksle. Fiksuotiems $\xi \in (0, 1)$, $H(\xi, t)$, taip pat yra tolydi funkcija ((3.10) formulė ir 5.2 paveikslas). Todėl šiuo atveju galima taikyti skyriaus įvade minėtus skaitinius sprendimo metodus. Kai $\xi \to 0, t \to 0$, tai $H(\xi, t) \to \infty$, t. y. $\lim_{\xi \to 0, t \to 0} H(\xi, t) = \infty$.

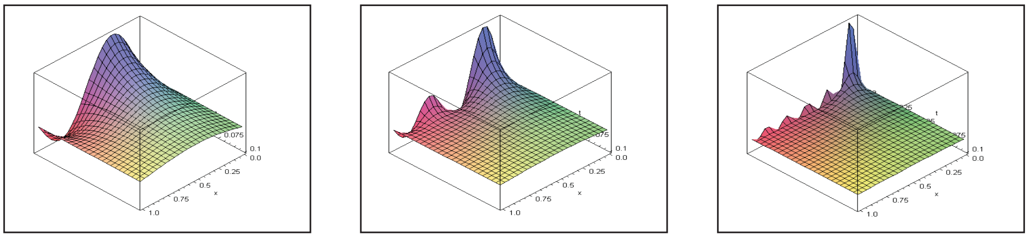
5.3.1. Integralinė lygtis

Kadangi $H_N(\xi, t)$ yra tolydi funkcija, tai iš bendros integralinių lygčių teorijos, kurioje įrodomas integralinio uždavinio išsprendžiamumas ir vienatis tolydžiųjų funkcijų klasėje, išplaukia, kad (3.16) lygtis turi vienintelį sprendinį su bet kokia parametro $\gamma > 0$ reikšme.

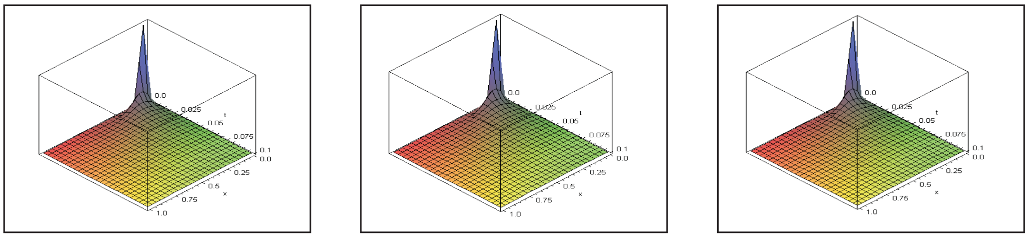
Integralinės (3.16) lygties sprendimui intervale $[0, T]$ galima naudoti įvairias kvadratūrines formules [69]

$$z^j = \gamma \sum_{i=1}^{j-1} z^i A_i K(t_j, t_i) + F(t_j).$$

Taip pat integralinės lygties sprendinį galima surasti ir Pikaro iteracijų metodu arba naudoti B-splainų metodus [84, 104].



$\tilde{H}_N(\xi,t), N=2$ $\quad$ $\tilde{H}_N(\xi,t), N=4$ $\quad$ $\tilde{H}_N(\xi,t), N=10$



$\tilde{\tilde{H}}_N(\xi,t), N=2$ $\quad$ $\tilde{\tilde{H}}_N(\xi,t), N=4$ $\quad$ $\tilde{\tilde{H}}_N(\xi,t), N=10$

5.2 pav. Branduoliai $\tilde{H}_N(\xi,t)$ ir $\tilde{\tilde{H}}_N(\xi,t)$

5.3.2. Diferencialiniai uždaviniai su kitokio tipo kraštinėmis sąlygomis

Taip pat (2.2) uždavinį galima nagrinėti ir su kitokio tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Pavyzdžiui, kai vienoje kraštinėje sąlygoje yra sprendinio išvestinė

$$u(0,t) = \gamma u(\xi,t) + d(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \mu(t), \quad \xi \in (0,1).$$

Tokiu atveju, sprendinį bus galima užrašyti

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_0^1 \varphi(y) G(x,y,t)\mathrm{d}y + \int_0^t \int_0^1 f(y,\tau) G(x,y,t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \\ & + c^2 \int_0^t z(\tau) H(x,t-\tau)\mathrm{d}\tau + c^2 \int_0^t \mu(\tau) G(x,1,t-\tau)\mathrm{d}\tau; \end{aligned}$$

čia Gryno funkcijos išraiškos yra tokios:p

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x,y,t) = {} & 2\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left\{\frac{\pi(2n+1)x}{2}\right\} \sin\left\{\frac{\pi(2n+1)y}{2}\right\}\times \\ & \times \exp\left\{-\frac{c^2\pi^2(2n+1)^2 t}{4}\right\}, \\ \tilde{\tilde{G}}(x,y,t) = {} & \frac{1}{2\sqrt{\pi c^2 t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Big\{ \exp\left\{-\frac{(x-y+2n)^2}{4c^2 t}\right\} - \\ & - \exp\left\{-\frac{(x+y+2n)^2}{4c^2 t}\right\}\Big\}. \end{aligned}$$

Antrojo tipo Volteros integralinė lygtis šiuo atveju yra

$$z(t) = \gamma c^2 \int_0^t z(\tau)H(\xi, t-\tau)\mathrm{d}\tau + F(t),$$

$$F(t) = d(t) + \gamma \int_0^1 \varphi(y)G(\xi, y, t)\mathrm{d}y + \gamma \int_0^t \int_0^1 f(y,\tau)G(\xi, y, t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \gamma c \int_0^t \mu(\tau)G(\xi, 1, t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Gali būti nagrinėjamas (2.2) parabolinis uždavinys, kai abiejose kraštinėse sąlygose yra sprendinio išvestinės

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \gamma u(\xi, t) + d(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \mu(t), \quad \xi \in (0,1).$$

Tokiu atveju sprendinį bus galima užrašyti taip:

$$u(x,t) = \int_0^1 \varphi(y)G(x,y,t)\mathrm{d}y + \int_0^t \int_0^1 f(y,\tau)G(x,y,t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau$$
$$- c^2 \int_0^t z(\tau)G(x,0,t-\tau)\mathrm{d}\tau + c^2 \int_0^t \mu(\tau)G(x,1,t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Šiuo atveju Gryno funkcijos išraiškos yra tokios:

$$\tilde{G}(x,y,t) = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi x)\cos(n\pi y)\exp\big\{-c^2 n^2 \pi^2 t\big\},$$
$$\tilde{\tilde{G}}(x,y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c^2 t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{\exp\Big\{-\frac{(x-y+2n)^2}{4c^2 t}\Big\} +$$
$$+ \exp\Big\{-\frac{(x+y+2n)^2}{4c^2 t}\Big\}\Big\},$$

o antrojo tipo Volteros integralinės lygties išraiška yra tokia:

$$z(t) = -\gamma c^2 \int_0^t z(\tau)G(\xi, 0, t-\tau)\mathrm{d}\tau + F(t),$$

čia

$$F(t) = d(t) + \gamma \int_0^1 \varphi(y)G(\xi, y, t)\mathrm{d}y + \gamma \int_0^t \int_0^1 f(y,\tau)G(\xi, y, t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \gamma c^2 \int_0^t \mu(\tau)G(\xi, 1, t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

5.4. Pagrindiniai skyriuje gauti rezultatai

- Modelinio parabolinio uždavinio su nelokaliąja taškine kraštine sąlyga sprendinio radimas suvestas į antrojo tipo Volteros integralinės lygties sprendimą. Išsprendus šią integralinę lygtį, gaunamos pradinio parabolinio uždavinio sprendinio reikšmės srities krašte, kuriame duota nelokalioji kraštinė sąlyga. Tokiu būdu parabolinio uždavinio sprendinį galima rasti sprendžiant parabolinį uždavinį su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis.

- Išanalizuoti šios lygties branduoliai su įvairiomis parametro ξ reikšmėmis.

- Gautos Gryno funkcijų ir Volteros integralinės lygties išraiškos paraboliniams uždaviniams su antrojo tipo sąlyga dešiniajame krašte, taip pat ir tuo atveju kai abi kraštinės sąlygos yra antrojo tipo.

Pagrindiniai rezultatai ir išvados

1. Išanalizuotos Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įvairiomis integralinėmis ir dvitaškėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis realiosios tikrinės reikšmės. Ištirta šių uždavinių spektrų priklausomybė nuo nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų. Nustatyta su kokiomis šių parametrų reikšmėmis egzistuoja neigiamos, kartotinės ir kompleksinės tikrinės reikšmės. Sukurta metodika Šturmo ir Liuvilio uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis spektro tyrimui.

2. Nustatyti Šturmo ir Liuvilio uždavinio su įvairiomis integralinėmis ir dvitaškėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimo intervalai. Surastos nelokaliųjų kraštinių sąlygų parametrų reikšmės su kuriomis egzistuoja teigiamos intervale $(0, 1)$ tikrinės funkcijos. Suformuluota teorema apie teigiamų tikrinių reikšmių ir jas atitinkančių teigiamų tikrinių funkcijų egzistavimą.

3. Ištirtas baigtinių skirtumų schemų, aproksimuojančių stacionarųjį uždavinį su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis stabilumas ir konvergavimas pagal energetinę normą.

4. Modelinio parabolinio uždavinio su nelokaliąja taškine kraštine sąlyga sprendinio radimas, panaudojant Gryno funkciją, suvestas į antrojo tipo Volteros integralinės lygties sprendimą. Išanalizuoti šios integralinės lygties branduoliai prie įvairių nelokaliosios kraštinės sąlygos parametro reikšmių.

Literatūros sąrašas

[1] WT. Ang. Numerical solution of a non classical parabolic problem, an integro-differential approach. *Applied Mathematics and Computation*, **175**(2), 2006, p. 969–979.

[2] V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations.* Springer Verlag, 1997.

[3] D.K. Arrowsmith, C.M. Place. *Ordinary Differential Equations. A qualitative approach with applications.* London New York: Chapman and Hall, 1982.

[4] N. Bachvalov, A. Židkov, G. Kobelnikov. *Čislienyje metody.* Moskva - Sankt-Peterburg: Fizmatlit, 2001.

[5] B. Bandyrskii, I. Lazurchak, V. Makarov, M. Sapagovas. Eigenvalue problem for the second order differential equation with nonlocal conditions. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **11**(1), 2006, p. 13–32.

[6] S.A. Beilin. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, **42**, 2001, p. 1–8.

[7] A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **185**, 1969, p. 739–740.

[8] N. Borovykh. Stability in the numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics*, **42**, 2002, p. 17–27.

[9] A. Boucherif. Differential equations with nonlocal boundary conditions. *Nonlinear Analysis*, **47**, 2001, p. 2419–2430.

[10] A. Bouziani. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques. *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique*, 1997, p. 53–70.

[11] A. Bouziani. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique*, 1999, p. 61–77.

[12] B.M. Budak, A.A. Samarskii, A.N. Tichonov. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike*. Moskva: FML, 2003. (rusų kalba)

[13] J.R. Cannon. The solution of the heat equation subject to specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, **21**(2), 1963, p. 155–160.

[14] D. Cao, R. Ma. Positive solutions to a second order multi-point boundary value problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, **65**, 2000, p. 1–8.

[15] R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė, M. Sapagovas. Eigenvalue problem for ordinary differential operator subject to integer condition. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **9**(2), 2004, p. 109–116.

[16] R. Čiegis. Numerical solution of a problem with small parameter for the highest derivative and nonlocal condition. *Liet. Matem. Rink.*, **28**(1), 1988, p. 90–96.

[17] R. Čiegis. *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*. Vilnius: Technika, 2003.

[18] R. Čiegis. Finite-difference schemes for nonlinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions. M. Ahues, C. Constanda, A. Largillier(Eds.), *Integral Methods in Science and Engineering: Analytic and Numerical Techniques*, Birkhauser: Boston, 2004, p. 47–52.

[19] R. Čiegis. Parallel numerical algorithms for 3d parabolic problem with nonlocal boundary condition. *Informatica*, **17**(3), 2006, p. 309–324.

[20] R. Čiegis, V. Būda. *Skaičiuojamoji matematika*. Vilnius: TEV, 1997.

[21] R. Čiegis, M. Meilūnas. On the difference scheme for a nonlinear diffusion reaction type problem. *Liet. Matem. Rink.*, **33**(1), 1993, p. 16–29.

[22] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, O. Subač. Stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*, **6**(2), 2001, p. 178–191.

[23] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė, O. Subač. A monotonic finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions. *Differential Equations*, **38**(7), 2002, p. 1027–1037.

[24] R. Čiegis , O. Štikonienė, O. Subač. Vieno uždavinio su nelokalia kraštine sąlyga sprendimas. *Liet. matem. rink.*, **41**(spec. nr.), 2001, p. 497–503. (rusų kalba)

[25] Raim. Čiegis, Rem. Čiegis. Asymptotical stability of economical difference schemes. *Liet. Matem. Rink.*, **31**, 1991, p. 535–548.

[26] Raim. Čiegis, O. Štikonienė, Rem. Čiegis. O rasshirenii odnoi metodiki isliedovania nelineinych raznostnych schem. *Liet. Mat. Rink.*, **37**(2), 1997, p. 155–167. (rusų kalba)

[27] R.J. Čiegis. Numerical solution the heat equation with nonlocal condition. *Liet. Matem. Rink.*, **24**(4), 1984, p. 206–215.

[28] W.A. Day. Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and order theories. *Quart. Applied Mathem.*, **40**, 1982, p. 319–330.

[29] W.A. Day. A decreasing property of solutions of the parabolic equations with applications to thermoelasticity. *Quart. Applied Mathem.*, **41**, 1983, p. 468–475.

[30] M. Dehghan. Efficient techniques for the second-orfer parabolic equation subject to nonlocal specifications. *Applied Numerical Mathematics*, **52**(1), 2005, p. 39–62.

[31] K. Deng. Comparison principle for some nonlocal problems. *Quart. Appl. Math.*, **50**, 1992, p. 517–522.

[32] G. Ekolin. Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation. *BIT*, **31**, 1991, p. 245–261.

[33] P.W. Eloe, J. Henderson. Positive solutions and nonlinear multipoint conjugate eigenvalue problems. *Electron. J. Differential Equations*, 8, 1997, p. 1–11.

[34] L. Erbe. Eigenvalue criteria for existence of positive solutions to nonlinear boundary value problems. *Math. Comput. Modelling*, **32**, 2000, p. 529–539.

[35] L.H. Erbe, S.C. Hu, H. Wang. Multiple positive solutions of some boundary value problems. *J. Math. Analysis Applic.*, **184**, 1994, p. 640–648.

[36] G. Fairweather, J.C. Lopez-Marcos. Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal conditions. *Advances in Comput. Mathem.*, **6**, 1996, p. 243–262.

[37] A. Friedman. Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.*, **44**, 1986, p. 401–407.

[38] A.V. Goolin, I.Ionkin, V.A. Morozova. Difference schemes with nonlocal boundary conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **1**(1), 2001, p. 62–71.

[39] D. Gordeziani, T. Davitashvili. Mathematical model of the atmosphere pollution with non-classic boundary condition. *Applied Mathem. and Informatics*, **4**(1), 1999, p. 75–92.

[40] D. Gordeziani, N. Gordeziani, G. Avalishvili. Nonlocal boundary value problems for some partial differential equations. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, **157**(3), 1998, p. 365–368.

[41] D.G. Gordeziani, G.A. Avalishvili. Investigation of the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations. *Hirosima Math. J.*, **31**, 2001, p. 345–366.

[42] N. Gordeziani. On some non-local problems of the theory of elasticity. *Buletin of TICMI*, **4**, 2000, p. 43–46.

[43] L. Greenberg, M. Marletta. Numerical solution of non-self-adjoint Sturm-Liouville problems and related systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**(6), 2001, p. 1800–1845.

[44] A. Gulin, N. Ionkin, V. Morozova. Stability criterion of difference schemes for the heat conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **6**(1), 2006, p. 31–55.

[45] A.V. Gulin, V.A. Morozova. On the stability of the nonlocal difference boundary value problem. *Diff. Equations*, **39**(7), 2003, p. 912–917.

[46] C.P. Gupta, S.K. Ntouyas, P.Ch. Tsamatos. On an m-point boundary value problem for second order ordinary differential equations. *Nonlinear Analysis TMA*, **23**, 1994, p. 1427–1436.

[47] C.P. Gupta, S.I. Trofimchuk. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem. *J. Math. Analysis Appl.*, **205**, 1997, p. 586–597.

[48] A.K. Gushin, V.P. Mikhailov. On solvability of nonlocal problems for second-odered elliptic equation. *Matem. Sbornik*, **185**, 1994, p. 121–160. (rusų kalba)

[49] E. Hairer, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II, 2nd ed.* 1996.

[50] J. Henderson, H. Wang. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems. *J. Math. Anal. Appl.*, **208**, 1997, p. 252–259.

[51] V.A. Ilyin. Necessary and sufficient properties of being a basis of a subsystem of eigenfunctions and adjoint functions for Keldysh bundle for odinary differential operators. *Doklady Acad. Nauk SSSR*, **227**(4), 1976, p. 796–799.

[52] V.A. Ilyin, E.I. Moiseev. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects. *Differential Equations*, **23**(7), 1987, p. 803–810. (rusų kalba)

[53] V.A. Ilyin, E.I. Moiseev. Two-dimensional nonlocal boundary value problems for poissons's operator in differential and difference variants. *Mat.Mod.*, **2**(4), 1990, p. 139–159. (rusų kalba)

[54] G. Infante. Eigenvalues of some non-local boundary-value problems. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **46**, 2003, p. 75–86.

[55] G. Infante, J.R.L. Webb. Nonzero solutions of hammerstein integral equations with discontinuous kernels. *J. Math. Analysis. Applic.*, **272**, 2002, p. 30–42.

[56] G. Infante, J.R.L. Webb. Three point boundary value problems with solutions that change sign. *J. Integ. Eqns. Appl.*, **15**(1), 2003, p. 37–57.

[57] N.I. Ionkin. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Diff. Equations*, **13**(2), 1977, p. 294–304. (rusų kalba)

[58] N.I. Ionkin, V.A. Morozova. Two dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions. *Diff. Equations*, **36**(7), 2000, p. 884–888. (rusų kalba)

[59] N.I. Ionkin, E.A. Valikova. On eigenvalues and eigenfunctions of a nonclassical boundary value problem. *Math.Modelling, Russia*, **8**(1), 1996, p. 53–63. (rusų kalba)

[60] F.F. Ivanauskas. Raznostnyje schemy dlia nielineinych uravnenii shredingierskogo i parabolicheskogo tipa. *Liet. Mat. Rink.*, **30**(2), 1990, p. 247–260. (rusų kalba)

[61] L.I. Kamynin. A boundary value problem in the theory of the heat conduction with nonclassical boundary condition. *Zh. Vychisl. Math.*, **4**(6), 1964, p. 1006–1024. (rusų kalba)

[62] G.L. Karakostas, P.Ch. Tsamatos. Positive solutions for a nonlocal boundary-value problem with increasing response. *Electronic J. of Differential Equations*, **2000**(73), 2000, p. 1–8.

[63] G.L. Karakostas, P.Ch. Tsamatos. Positive solutions of a boundary-value problem for second order ordinary differential equations. *Electronic J. of Differential Equations*, **2000**(49), 2000, p. 1–9.

[64] G.L. Karakostas, P.Ch. Tsamatos. Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary value problem. *Applied Mathematics Letters*, **15**(4), 2002, p. 401–407.

[65] B. Kawohl. Remarks on a paper by W. A. Day on a maximum principle under nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.*, **44**, 1987, p. 751–752.

[66] D. Kašliakovas, M. Sapagovas, F. Ivanauskas. Nelokalių uždavinių difuzijos lygčiai stabilumo sąlygos. *Lietuvos Matematikų draugijos XLVII konferencija*, 2006. (pranešimas konferencijoje)

[67] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. *Elementy teorii funkciji i funkcionalnogo analiza.* Moskva: Nauka, 1981. (rusų kalba)

[68] Q. Kong, H. Wu, A. Zettl. Sturm–liouville problems with finite spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **263**(2), 2001, p. 748–762.

[69] B. Kvedaras, M. Sapagovas. *Skaičiavimo metodai*. Vilnius: Mintis, 1974.

[70] K.Q. Lan. Eigenvalues of second order differential equations with singularities. *Proc. Int. Conf. on Dynamical Systems and Differential Equations*, 2000, p. 241–247.

[71] K.Q. Lan. Multiple positive solution of hammerstein integral equations with singularities. *Diff. Eqns. Dynam. Syst*, **8**, 2000, p. 175–195.

[72] K.Q. Lan, J.R.L. Webb. Positive solutions of semilinear differential equations with singularities. *J. Diff. Eqns.*, **148**, 1998, p. 407–421.

[73] M. Langer. Eigenvalues of a λ-rational sturm–liouville problem. *Math. Nachr.*, **210**, 2000, p. 163–176.

[74] B. Liu, J. Yu. Solvability of multi-point boundary value problem at resonance. *Applied Mathematics and Computation*, **129**(1), 2002, p. 119–143.

[75] Y. Liu. Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **110**, 1999, p. 115–127.

[76] A. Lomtatidze. On a nonlocal boundary value problem for second order linear ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **193**(3), 1995, p. 889–908.

[77] R. Ma. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary-value problem. *Electronic J. of Differential equations*, **34**, 1998, p. 1–8.

[78] R. Ma. Multiplicity of positive solutions for second-order three-point boundary value problems. *Comput. Math. Appl.*, **40**, 2000, p. 193–204.

[79] V.L. Makarov, D.T. Kulyev. Solution of a boundary value problem for a quasilinear equation of parabolic type with nonclassical boundary condition. *Diff. Equations*, **21**(2), 1985, p. 296–305. (rusų kalba)

[80] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*. Chelsea Publishing Company, New York, 1977.

[81] A.P. Matus, P.P. Matus. The maximum principle and its applicvation for the analysis of diference schemes. *Mathematical modelling and analysis*, **6**(2), 2001, p. 289–299.

[82] O.Sh. Muhtarov, M. Kadakal, F.S. Muhtarov. Eigenvalues and normalized eigenfunctions of discontinuous strum–liouville problem with transmission conditions. *Reports on Mathematical Physics*, **54**(1), 2004, p. 45–56.

[83] A.M. Nakhushev. *Equations of Mathematical Biology*. Vysshaya Shola, Moscow, 1995. (rusų kalba)

[84] P. Oja, D. Saveljeva. Cubic spline collocation for volterra integral equations. *Computing*, **69**, 2002, p. 319–337.

[85] P.K. Palamides. Positive and monotone solutions of m-point boundary-value problem. *Electronic J. of differential Equations*, **2002**, 2002, p. 1–16.

[86] C.V. Pao. Dynamics of reaction - diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *Quart. Appl. Math.*, **53**, 1995, p. 173–186.

[87] C.V. Pao. Reaction diffusion equations with non-local boundary and non-local initial conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **195**, 1995, p. 702–718.

[88] C.V. Pao. Asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.*, **88**, 1998, p. 225–238.

[89] A.D. Polianin. *Spravochnik po lineinym uravnenijam matematicheskoi fiziki*. Moskva: FML, 2001. (rusų kalba)

[90] A.A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes*. New York Basel: Marcel Dekker, Inc., 2001.

[91] A.A. Samarskii, A. Gulin. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

[92] Seo Sangwon. Global existence and desreasing property of boundary values of solution to parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Pacif. J. Math.*, **193**(1), 2000, p. 219–226.

[93] M. Sapagovas. Hypothesis on the solvability of parabolic equations with nonlocal conditions. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **7**(1), 2002, p. 93–104.

[94] M. Sapagovas. On solvability of the finite difference schemes for a parabolic equations with nonlocal condition. *Comput. Appl. Math.*, **88**, 2003, p. 89–98.

[95] M. Sapagovas, R.Čiegis. On some boundary problems with nonlocal conditions. *Diff. Equations*, **23**(7), 1987, p. 1268–1274. (rusų kalba)

[96] M.P. Sapagovas. The boundary value problem with a nonlocal condition for a system of ordinary differential equations. *Diff. Equations*, **36**(7), 2000, p. 971–978. (rusų kalba)

[97] M.P. Sapagovas. The eigenvalues of some problem with a nonlocal condition. *Diff. Equations*, **38**(7), 2002, p. 1020–1026. (rusų kalba)

[98] M.P. Sapagovas, A.D. Štikonas. On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition. *Diff. Equations*, **41**(7), 2005, p. 1010–1018.

[99] K. Schugerl. *Biorection engineering: reactions involving microorganisms and cells. Vol.1: Fundamentals, thermodinamics, formal kinetics, idealized reactor types and operation modes.* Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons Ltd., 1987.

[100] S. Seo. Global existence and decreasing property of boundary values of solutions to parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Pacific Journal of Mathematics*, **193**(1), 2000, p. 219–226.

[101] A.L. Skubachevski, G.M. Steblov. On spectrum of differential operators with domain nondense in l_2. *Dokladi AN USSR*, **321**(6), 1991, p. 1158–1163.

[102] Y.P. Sun. Nontrivial solution for a three–point boundary–value problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2004**(11), 2004, p. 1–10.

[103] Zhi-Zhong Sun. A high-order difference scheme for a nonlocal boundary-value problem for the heat equation. *CMAM*, **1**(4), 2001, p. 398–414.

[104] M. Tarang. Stability of the spline collocation method for second order volterra integro-differential equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, **9**(1), 2004, p. 79–90.

[105] E.C. Titchmarsh. *Razlozhenija po sobstvienym funkcijam, cviazanye s differencialnymi uravnienijami vtorogo poriadka I.* Moskva: Izdatelistvo inostrannoi literatury, 1960. (rusų kalba)

[106] E.C. Titchmarsh. *Razlozhenija po sobstvienym funkcijam, cviazanye s differencialnymi uravnienijami vtorogo poriadka II.* Moskva: Izdatelistvo inostrannoi literatury, 1961. (rusų kalba)

[107] R.J. Villanueva, L. Jodar. Discrete vector sturm–liouville problems with non-self-adjoint boundary conditions: eigenstructure, orthogonality, and eigenfunctions expansion. *Computers and Mathematics with Applications*, **47**(6), 2004, p. 1123–1133.

[108] Y. Wang. Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2002**(5), 2002, p. 1–16.

[109] J.R.L. Webb. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory. *Nonlinear Analysis*, **47**, 2001, p. 4319–4332.

[110] Y.F. Yin. On nonlinear parabolic equations with nonlocal boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **185**(1), 1994, p. 161–174.

[111] N.I. Yurchuk. Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. *Differents. Uravn.*, **22**(12), 1986, p. 2117–2126.

Autorės publikacijų sąrašas

[1A] S. Pečiulytė, O. Štikonienė, A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis*, **10**(4), 2005, p. 377–392, ISSN 1392-6292.

[2A] S. Pečiulytė, A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two points boundary condition. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **11**(1), 2006, p. 47–78, ISSN 1392-5113.

[3A] A. Štikonas, O. Štikonienė, S. Pečiulytė. Stacionarieji uždaviniai su įvairaus tipo nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis. *Liet. Mat. Rinkinys*, **43**(spec. nr.), 2003, p. 602–606, ISSN 0132-2818.

[4A] S. Pečiulytė, A. Štikonas. Apie vieno stacionariojo uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga spektrą. *Liet. Mat. Rinkinys*, **44**(spec.nr.), 2004, p. 655–659, ISSN 0132-2818.

[5A] S. Pečiulytė, A. Štikonas. Šturmo - Liuvilio uždavinys diferencialiniam operatoriui su viena dvitaške nelokaliąja antrojo tipo kraštine sąlyga. *Liet. Mat. Rinkinys*, **45**(spec. nr.), 2005, p. 432–436, ISSN 0132-2818.

[6A] S. Pečiulytė, O. Štikonienė, A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Proceedings of 10th International Conference MMA2005 and CMAM2*, Trakai, 2005, p. 199–204, ISBN 9986-05924-0.

[7A] S. Pečiulytė, A. Štikonas. Apie vieno stacionariojo uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga teigiamas tikrines reikšmes. *Matematika ir Matematinis modeliavimas*, **1**, 2005, p. 26–30, ISSN 1822-2757.

[8A] S. Pečiulytė, A. Štikonas.Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis suvedimas į integralinę lygtį // 9-oji tarpuniversitetinė magistr. ir doktor. konferencija „*Informacinė visuomenė ir univeristetinės studijos*“(pranešimų medžiaga), Kaunas, 2004, p. 246–250.