VILNIAUS UNIVERSITETAS

AGNĖ SKUČAITĖ

ŠTURMO IR LIUVILIO UŽDAVINIO SU INTEGRALINE NELOKALIĄJA SĄLYGA SPEKTRO TYRIMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016

Disertacija rengta 2011–2015 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas

prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

doc. dr. Mečislavas Meilūnas (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

prof. dr. Grigorij Panasenko (Saint-Etienne universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2016 m. rugsėjo 28 d. 11 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute, 203 a.

Adresas: Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2016 m. rugpjūčio 28 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

AGNĖ SKUČAITĖ

INVESTIGATION OF THE SPECTRUM OF THE STURM–LIOUVILLE PROBLEM WITH A NONLOCAL INTEGRAL CONDITION

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

Doctoral dissertation was written in 2011–2015 at Vilnius University.

Scientific supervisor

prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The Dissertation Defence Board:

Chairman

prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Members:

prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics – 01P);

assoc. prof. dr. Mečislavas Meilūnas (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics – 01P);

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P);

prof. dr. Grigory Panasenko (Université de Saint-Etienne, Physical sciences, Mathematics — 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of Vilnius University Mathematics Research Council in lecture room 203, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius University at 11:00 am. on September 28, 2016.

Address: Akademijos str. 4, LT-08663 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on August 28, 2016.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and online at www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Įžanga

Disertacijoje nagrinėjamas diferencialinis Šturmo ir Liuvilio uždavinys su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga ir jo diskretusis analogas. Tokių uždavinių spektro struktūros tyrimas svarbus nagrinėjant diferencialinių ir diskrečiųjų uždavinių sprendinio egzistavimą ir vienatį, baigtinių skirtumų schemų stabilumo tyrimui, pagrįsti iteracinius metodus tokiems uždaviniams. Spektro struktūros tyrimas taip pat labai svarbus kaip atskiras uždavinys. Disertacijoje pateikiami rezultatai praplečia ir papildo iki šiol kitų mokslininkų gautus rezultatus, tiriant panašių uždavinių spektro struktūrą ir spektro struktūros priklausomybę nuo nelokaliųjų sąlygų parametrų.

Disertacijoje ištirta Šturmo ir Liuvilio uždavinio su viena klasikine sąlyga kairiajame krašte ir kita nelokaliąja integraline (daugiataške) kraštine sąlyga, priklausančia nuo trijų parametrų, spektro struktūra ir jo priklausomybė nuo šių parametrų.

2 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos pagrindinis tyrimų objektas yra Šturmo ir Liuvilio uždavinys su viena klasikine Dirichlė tipo kraštine sąlyga ir kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga, kai integruojama intervale $[\xi_1; \xi_2] \subset [0; 1]$. Disertacijos mokslinė problema yra ištirti šio uždavinio spektro struktūrą ir jo priklausomybę nuo nelokaliosios integralinės kraštinės sąlygos integravimo rėžių (nelokaliosios integralinės kraštinės sąlygos parametro ξ arba $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$) ir parametro γ. Taip pat tiriama diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektro struktūra.

3 Pagrindiniai uždaviniai

1. **Šturmo ir Liuvilio uždavinys su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga, priklausančia nuo trijų parametrų**. Pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas diferencialinis Šturmo ir Liuvilio uždavinys, kai integralinė kraštinė sąlyga yra $u(1) = \gamma \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(t)\,\mathrm{d}t$, čia γ, ξ_1, ξ_2 – integralinės kraštinės sąlygos parametrai. Pagrindiniai skyriaus uždaviniai:

   - ištirti charakteristinės funkcijos nulių, polių ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškus;
   - atlikti kokybinį spektrinių kreivių tyrimą;
   - ištirti kritinius taškus ir jų trajektorijas;

- ištirti spektrines kreives bifurkacijos takų aplinkoje.

2. **Šturmo ir Liuvilio uždavinys su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga, priklausančia nuo dviejų parametrų**. Antrajame skyriuje nagrinėjami Šturmo ir Liuvilio uždavinio su integraline kraštine sąlyga tam tikri ribiniai atvejai. Pagrindiniai šio skyriaus uždaviniai:

   - ištirti kompleksinės spektro dalies struktūrą ir priklausomybę nuo integralinės kraštinės sąlygos parametrų γ ir ξ, kai integralinė sąlyga yra viena iš trijų tipų: $u(1) = \gamma \int_\xi^1 u(t)\,\mathrm{d}t$, $u(1) = \gamma \int_\xi^1 u(t)\,\mathrm{d}t$, $u(1) = \gamma \int_\xi^{1-\xi} u(t)\,\mathrm{d}t$;
   - ištirti spektrines kreives bifurkacijos taškų aplinkoje.

3. **Diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys**. Trečiajame skyriuje nagrinėjamas diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys, atitinkantis pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėtą diferencialinį uždavinį. Integralinė sąlyga aproksimuojama pagal trapecijų formulę. Pagrindiniai šio skyriaus uždaviniai:

   - rasti diskrečiojo uždavinio charakteristinę funkciją, jos nulius, polius ir pastoviąsias tikrines reikšmes;
   - ištirti spektrinių kreivių savybes;
   - nustatyti spektro struktūros priklausomybę nuo tinklo taškų skaičiaus ir nelokaliosios integralinės kraštinės sąlygos parametrų;
   - nustatyti spektro struktūrą ir spektrinių kreivių elgseną ypatingų taškų aplinkoje.

4. **Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio tam tikri atvejai**. Ketvirtajame skyriuje nagrinėjamas diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys, atitinkantis antrajame skyriuje nagrinėtus diferencialinius uždavinius. Integralinė sąlyga aproksimuojama dviem būdais: trapecijų arba Simpsono formule. Pagrindiniai šio skyriaus uždaviniai sutampa su trečiojo skyriaus uždaviniais. Papildomas uždavinys: ištirti priklausomybę nuo nelokaliosios sąlygos aproksimavimo būdo.

4 Tyrimų metodika

Tiriant diferencialinį ir diskretųjį Šturmo ir Liuvilio uždavinius, buvo naudojamas charakteristinės funkcijos metodas [4, Štikonas and Štikonienė 2009]. Šio uždavinio spektro savybės priklauso nuo charakteristinės funkcijos, nulių, polių, pastoviųjų tikrinių reikšmių taškų ir kritinių taškų pasiskirstymo. Tiek realiosios, tiek kompleksinės spektro dalies tyrimas buvo papildomas skaitiniais eksperimentais, kurių rezultatai pateikiami charakteristinių funkcijų grafikais, spektrinių kreivių grafikais ir trajektorijomis parametrų $(\xi_1; \xi_2)$ fazinėje erdvėje ir bifurkacijų diagramomis.

5 Moksliniai rezultatai

Disertacijoje ištirta diferencialinio ir diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinių su viena klasikine sąlyga kairiajame krašte ir kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga, priklausančia nuo trijų arba dviejų parametrų, spektro struktūra. Įrodyti teiginiai apie charakteristinės funkcijos savybes. Darbe nagrinėtos spektrinių kreivių savybės ir šių kreivių bifurkacijos.

Toliau šiame skyriuje aprašyti disertacijoje gauti rezultatai. Santraukoje teoremų ir lemų numeracija atitinka numeraciją, pateiktą disertacijoje.

5.1 Diferencialinis Šturmo ir Liuvilio uždavinys su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

Pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0; 1), \tag{1}$$

$\lambda \in \mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}$ su viena klasikine sąlyga

$$u(0) = 0 \tag{2}$$

ir kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga

$$u(1) = \gamma \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(t)\, \mathrm{d}t, \tag{3}$$

o parametrai $\gamma \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in S_{\boldsymbol{\xi}} = \{(\xi_1, \xi_2) \colon 0 < \xi_1 < \xi_2 < 1\}$. Šiame disertacijos skyriuje atlikta charakteristinės funkcijos nulių, polių ir pastoviųjų tikrinių reikšmių klasifikacija ir ištirtos šių taškų egzistavimo sąlygos. Taip pat ištirti charakteristinės funkcijos kritiniai taškai, nustatyta jų eilė ir skaitiškai rastos šių kritinių taškų trajektorijos fazinėje parametrų $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ erdvėje $S_{\boldsymbol{\xi}}$.

Pažymėkime $\mathbb{C}_q := \{q = x + \imath y \in \mathbb{C} : x = 0, y \geqslant 0 \text{ arba } x > 0\}$. Tada atvaizdis $\lambda = \lambda(q) := (\pi q)^2$ yra bijekcija iš $\mathbb{C}_q$ į $\mathbb{C}_\lambda$ [4, Štikonas and Štikonienė 2009]. Kintamasis $q \in \mathbb{C}_q$

yra patogus tiriant Šturmo ir Liuvilio uždavinio spektrą, nes tikrinių funkcijų pavidalas yra $u_q(t) = \sin(\pi q t)/(\pi q)$. Taškas $\lambda = 0$ yra funkcijos $\lambda = (\pi q)^2$ pirmosios eilės šakojimosi taškas. Realiąsias tikrines reikšmes atitinka $\mathbb{C}_q$ poaibis $\mathbb{R}_q = \mathbb{R}_q^- \cup \mathbb{R}_q^+ \cup \mathbb{R}_q^0$, čia $\mathbb{R}_q^- := \{q \in \mathbb{C}_q : x = 0, y > 0\}$, $\mathbb{R}_q^+ := \{q \in \mathbb{C}_q : x > 0, y = 0\}$, $\mathbb{R}_q^0 := \{q = 0\}$.

Įvesime dvi sveikąsias funkcijas, susijusias su nelokaliąja kraštine sąlyga (3):

$$Z(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, \quad P_{\boldsymbol{\xi}}(z) := 2P_{\boldsymbol{\xi}}^1(z)P_{\boldsymbol{\xi}}^2(z), \tag{4}$$

čia

$$P_{\boldsymbol{\xi}}^1(z) := \sin(\pi z(\xi_1 + \xi_2)/2)/(\pi z), \quad P_{\boldsymbol{\xi}}^2(z) := \sin(\pi z(\xi_2 - \xi_1)/2)/(\pi z). \tag{5}$$

Šių funkcijų nuliai yra svarbūs tiriant uždavinio (1)–(3) spektro struktūrą. Funkcijos $Z(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$, nuliai sutampa su nuliais klasikiniu atveju, kai $\gamma = 0$. Funkcijos $Z(z)$ visi nuliai $z_k = k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ yra paprasti ir teigiami. Visos pastoviosios tikrinės reikšmės $\lambda = (\pi q)^2$, kurios nepriklauso nuo kraštinės sąlygos (3) parametro γ, randamos iš lygčių sistemos

$$Z(q) = 0, \quad P_{\boldsymbol{\xi}}(q) = 0.$$

Šios sistemos sprendinius vadinsime *pastoviųjų tikrinių reikšmių taškais*. Pastoviųjų tikrinių reikšmių taškų aibę žymėsime $\mathcal{C}$ arba $\mathcal{C}_{\xi}$. Srityje $\mathbb{C}_q$ visi funkcijų $P_{\boldsymbol{\xi}}^1$, $P_{\boldsymbol{\xi}}^2$ nuliai taip pat yra paprasti ir teigiami. Taigi funkcijos $P_{\boldsymbol{\xi}}$ nuliai gali būti pirmosios arba antrosios eilės. Meromorfinės funkcijos

$$\gamma_c(z) = \frac{Z(z)}{P_{\boldsymbol{\xi}}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

siaurinį aibėje $\mathbb{C}_q$ vadiname Šturmo ir Liuvilio uždavinio (1)–(3) *kompleksine charakteristine funkcija*. Visos *nepastoviosios tikrinės reikšmės*, kurios priklauso nuo γ, ir jų taškai randami tiriant kompleksinę-realiąją ($\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$) charakteristinę funkciją $\gamma = \gamma(q)$, $q \in \mathbb{C}_q$ [4, Štikonas and Štikonienė 2009]. $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinė funkcija yra meromorfinės funkcijos γ_c siaurinys aibėje $\mathcal{N}^{\gamma} := \{q \in \mathbb{C}_q \colon \mathrm{Im}\gamma_c(q) = 0\}$. Realioji charakteristinė funkcija yra $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinės funkcijos siaurinys aibėje $\mathbb{R}_q$, kurioje $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinė funkcija įgyja realiąsias reikšmes. $\mathcal{N}(\gamma)$ žymime tuos $\mathcal{N}^{\gamma}$ taškus, kuriuose $\gamma_c(q) = \gamma$. $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinės funkcijos γ-taškai, kurie yra pastarosios lygties sprendiniai, vadinami spektriniais taškais, ir žinodami juos, pasinaudodami atvaizdžiu $\lambda = \lambda(q) = (\pi q)^2$, galime rasti tikrines reikšmes. Spektro taškai priklauso aibei $\mathcal{N} = \cup_{\gamma \in \mathbb{R}} \mathcal{N}(\gamma) \cup \mathcal{C}$, kuri yra vadinama *spektrine sritimi*. Jeigu $q \in \mathcal{N}^{\gamma}$ ir $\gamma_c'(q) \neq 0$ (q nėra charakteristinės funkcijos kritinis taškas), tai $\mathcal{N}(\gamma)$ parametro γ atžvilgiu taško q aplinkoje yra glodi parametrinė kreivė $\mathcal{N} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}_q$, ir galima nurodyti tikrinės reikšmės taško judėjimo šia kreive kryptį, kai parametro γ reikšmė kinta (didėja). Jei

$\gamma = 0$, tai tikrinių reikšmių taškai yra $q = z_k = k \in \mathbb{N}$. Šiuo atveju kreivės $\mathcal{N}(\gamma)$ numeraciją galima susieti su klasikiniu atveju $\mathcal{N}_k(0) = k \in \mathbb{N}$. Kiekvienam pastoviosios tikrinės reikšmės taškui $c_j = j$ apibrėžiame $\mathcal{N}_j = \{c_j\}$, t.y. kreivė $\mathcal{N}_j$ yra sudaryta tik iš vieno taško. Kreivės $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$, yra vadinamos *spektrinėmis kreivėmis*. Kiekviena spektrinė kreivė apibrėžiama visoms $\gamma \in \mathbb{R}$ reikšmėms. Kai $\gamma \to \pm\infty$, spektrinė kreivė $\mathcal{N}_k(\gamma)$ artėja prie polių arba prie taško $q = \infty$. Todėl spektrinių kreivių tyrimui labai svarbu žinoti charakteristinės funkcijos nulius, polius ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškus. Šturmo ir Liuvilio uždavinio (1)–(3) tam tikri atvejai, kai parametrai ξ_1 ir ξ_2 yra fiksuoti, taip pat buvo pradėti tirti S. Mikalauskaitės magistro darbe [1]. Tačiau šiame jos darbe nebuvo atlikta kokybinio spektrinių kreivių tyrimo.

Charakteristinės funkcijos nuliai, poliai ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai

Pažymėkime dviejų natūrinių skaičių (pvz.: n ir m) didžiausią bendrą daliklį $\mathrm{dbd}(n,m)$ ir $\xi = \xi_1/\xi_2$, $\xi_+ = \xi_1+\xi_2$, $\xi_- = \xi_2-\xi_1$. Srityje $\mathbb{C}_q$ visi funkcijų Z, $P^1_{\boldsymbol{\xi}}$, $P^2_{\boldsymbol{\xi}}$ nuliai yra pirmosios eilės, realūs ir teigiami (žiūrėti (5)):

$$z_k = k \in \mathbb{N}, \quad p^1_k = \tfrac{2}{\xi_+}k,\ k \in \mathbb{N}, \quad p^2_k = \tfrac{2}{\xi_-}k,\ k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Tarkime, šių taškų aibės yra $\overline{\mathcal{Z}}$, $\overline{\mathcal{Z}}^1_{\boldsymbol{\xi}}$, $\overline{\mathcal{Z}}^2_{\boldsymbol{\xi}}$. Aibė $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{\xi}} = \mathcal{Z}^1_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{Z}^2_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$ aprašo visus funkcijos $P_{\boldsymbol{\xi}}$ nulius, čia $\mathcal{Z}^1_{\boldsymbol{\xi}} := \overline{\mathcal{Z}}^1_{\boldsymbol{\xi}} \setminus \mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$ ir $\mathcal{Z}^2_{\boldsymbol{\xi}} := \overline{\mathcal{Z}}^2_{\boldsymbol{\xi}} \setminus \mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$ yra pirmosios eilės ir $\mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} := \overline{\mathcal{Z}}^1_{\boldsymbol{\xi}} \cap \overline{\mathcal{Z}}^2_{\boldsymbol{\xi}}$ antrosios eilės nulių šeimos.

Jeigu $\xi_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2$, tada sakysime, kad $\xi_i = m_i/n_i$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$. Tokios taisyklės laikysimės ir dydžiui $\xi = \xi_1/\xi_2 \in \mathbb{Q}$: $\xi = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Kai $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Q}$, tada tariame, kad $m = m_1n_2$, $n = m_2n_1$, $n_+ = n_- = n_1n_2$, $m_+ = m_2n_1 + m_1n_2$, $m_- = m_2n_1 - m_1n_2$.

Pastaba. Jeigu $\xi \in \mathbb{Q}$, tada $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Q}$ arba $\xi_1, \xi_2 \notin \mathbb{Q}$. Jeigu $\xi \notin \mathbb{Q}$, tada $\xi_1 \notin \mathbb{Q}$ arba $\xi_2 \notin \mathbb{Q}$, arba $\xi_1, \xi_2 \notin \mathbb{Q}$.

1.7 teorema. *Jeigu $\xi = \xi_1/\xi_2 \notin \mathbb{Q}$, tai funkcijos $P_{\boldsymbol{\xi}}(z)$ antrosios eilės nuliai neegzistuoja, t.y. $\mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$. Jeigu $\xi = m/n \in \mathbb{Q}$, tada aibės $\mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$ taškai yra:*

$$p^{12}_k = 2n/(\xi_2 d_p)k = 2m/(\xi_1 d_p)k,\ k \in \mathbb{N}, \quad d_p = \mathrm{dbd}(n-m, n+m). \tag{8}$$

Apibrėžkime aibes: charakteristinės funkcijos polių aibę $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, čia $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{Z}^1_{\boldsymbol{\xi}} \setminus \overline{\mathcal{Z}}$ ir $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{Z}^2_{\boldsymbol{\xi}} \setminus \overline{\mathcal{Z}}$ yra pirmosios eilės polių aibės, o antrosios eilės poliai priklauso aibei $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} \setminus \overline{\mathcal{Z}}$. Pastoviųjų tikrinių reikšmių taškų aibė yra $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, čia $\mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{Z}^1_{\boldsymbol{\xi}} \cap \overline{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{Z}^2_{\boldsymbol{\xi}} \cap \overline{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} := \mathcal{Z}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} \cap \overline{\mathcal{Z}}$. Reikia pažymėti, kad aibės $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$ taškuose charakteristinė funkcija turi pirmosios eilės polius. Charakteristinės funkcijos nulių aibė yra $\mathcal{Z}_{\boldsymbol{\xi}} := \overline{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}}$.

Jeigu $\xi = m/n \in \mathbb{Q}$, $\xi_1, \xi_2 \notin \mathbb{Q}$, tai ξ_+, $\xi_- \notin \mathbb{Q}$. Tada pastoviosios tikrinės reikšmės neegzistuoja ($\mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$), tačiau egzistuoja pirmosios ir antrosios eilės poliai, priklausantys aibėms $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}}$ ir $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, o poliai p^1_k, p^2_k, p^{12}_k, $k \in \mathbb{N}$, randami remiantis formulėmis (7)–(8).

Jeigu $\xi \notin \mathbb{Q}$, tai bent vienas arba abu skaičiai ξ_+, ξ_- yra iracionalūs. Jeigu šie skaičiai yra iracionalūs ($\xi_+ \notin \mathbb{Q}$ ir $\xi_- \notin \mathbb{Q}$), tai abi aibės $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}}$ ir $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}}$ nėra tuščios, tačiau $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} = \mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$.

1.8 teorema. *Jeigu $\xi_+ = m_+/n_+ \in \mathbb{Q}$, $n_+ = n_1 n_2$, $m_+ = m_2 n_1 + m_1 n_2$, tai $\mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}} \neq \varnothing$, ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, priklausantys šiai aibei, yra:*

$$c^1_k = p^1_{m_+/d_1 k} = z_{2n_+/d_1 k} = 2n_+/d_1 k, \;\; k \in \mathbb{N}, \quad d_1 = \mathrm{dbd}(2n_+, m_+). \tag{9}$$

1.10 teorema. *Jeigu $\xi_- = m_-/n_- \in \mathbb{Q}$, $n_- = n_1 n_2$, $m_- = m_2 n_1 - m_1 n_2$, tai pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, priklausantys aibei $\mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}}$, yra:*

$$c^2_k = p^2_{m_-/d_2 k} = z_{2n_-/d_2 k} = 2n_-/d_2 k, \;\; k \in \mathbb{N}, \quad d_2 = \mathrm{dbd}(2n_-, m_-). \tag{10}$$

Jeigu tenkinama sąlyga $\xi_1 + \xi_2 \neq 2/l$, $1 < l \in \mathbb{N}$, tada $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$, $\mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$ ir $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$. Kitu atveju $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$. Aibė $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$, kai $\xi_- = 2/m$, $2 < m \in \mathbb{N}$, nes $p^2_1 = c^2_1$. Aibės ($\mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$,$\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$) yra tuščios, jei parametrai tenkina sąlygą $\xi_1 + \xi_2 \neq 2/l$. Jei ši sąlyga netenkinama, $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$.

Jeigu $\xi_1 = m_1/n_1, \xi_2 = m_2/n_2 \in \mathbb{Q}$, tai visoms $\boldsymbol{\xi}$ reikšmėms $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} \neq \varnothing$. Taip pat jeigu $n_1 = n_2 = n$ ir $m_1 + m_2 = n$, tada $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$ ir $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} = \varnothing$.

1.12 teorema. *Jeigu $\xi_1 = \frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$ ir $\xi_2 = \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$, tada uždavinio (1)–(3) charakteristinės funkcijos poliai, priklausantys aibėms $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}} + \mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, skaičiuojami pagal formules:*

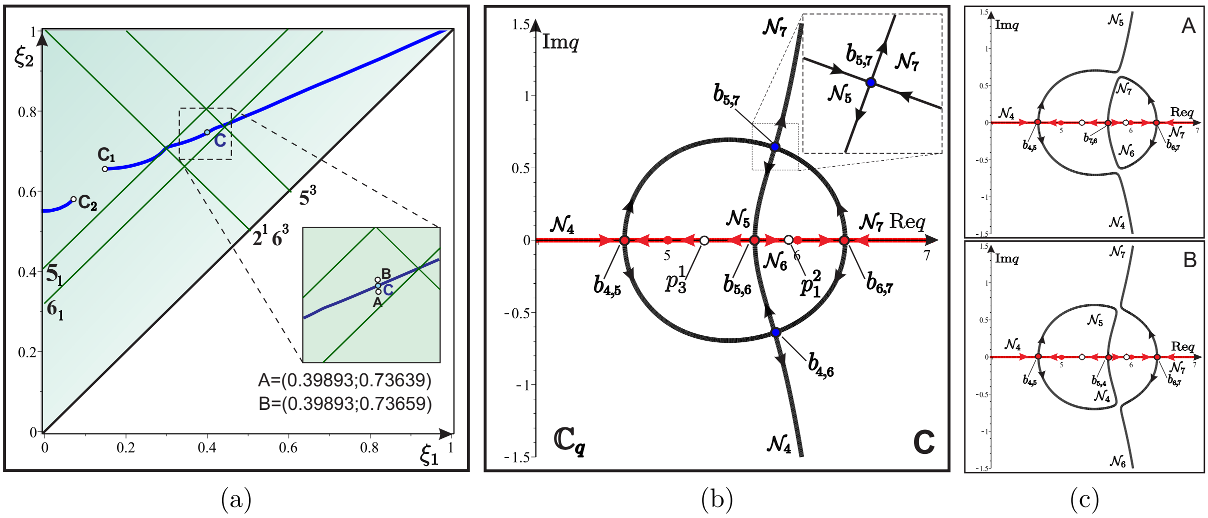
$$p^1_k = \frac{2n_1 n_2 k}{m_+}, \qquad p^2_k = \frac{2n_1 n_2 k}{m_-}, \qquad p^{12}_k = \frac{2n_1 n_2 k}{\mathrm{dbd}(m_-, m_+)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1.13 teorema. *Jeigu $\xi_1 = \frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$ ir $\xi_2 = \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$, tada uždavinio (1)–(3) pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai c^1_k ir c^2_k yra skaičiuojami pagal formules:*

$$c^1_k = \frac{2n_1 n_2 k}{\mathrm{dbd}(2n_\pm, m_+)}, \qquad c^2_k = \frac{2n_1 n_2 k}{\mathrm{dbd}(2n_\pm, m_-)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1.14 teorema. *Jeigu $\xi_1 = \frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$ ir $\xi_2 = \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$, tai uždavinio (1)–(3) pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai, priklausantys aibei $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, skaičiuojami pagal formulę:*

$$c^{12}_k = \frac{2n_1 n_2 k}{\mathrm{dbd}(2n_\pm, m_+, m_-)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$



5.1 pav.: (a) pirmosios eilės kompleksinio kritinio taško trajektorija fazinėje erdvėje, $C = (0.39893, 0.73649\dots)$; (b)–(c) spektrinės kreivės pirmosios eilės kompleksinio kritinio taško C aplinkoje

Kritiniai taškai

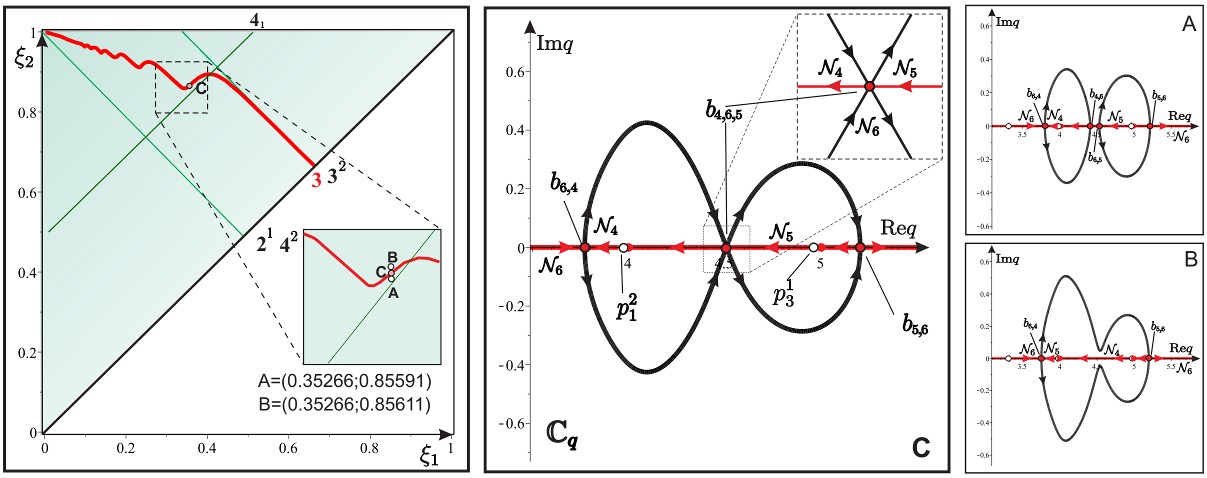
Jeigu taške $b \in \mathbb{C}$ galioja sąlyga $\gamma_c'(b) = 0$, tai taškas b yra vadinamas funkcijos γ_c *kritiniu tašku*, o reikšmė $\gamma_c(b)$ *kritine reikšme*. Spektrinės kreivės „susikerta“ tik kritiniuose taškuose $q = b$ ir paskui keičia judėjimo kryptį pasukdamos į dešinę (taikoma „*dešinės rankos*“ taisyklė). Jei funkcija γ_c taške $b \in \mathbb{C}_q$ tenkina sąlygas $\gamma_c'(b) = 0, \dots, \gamma_c^k(b) = 0$, $\gamma_c^{(k+1)}(b) \neq 0$, taškas b vadinamas k-osios eilės kritiniu tašku. Šiame taške spektrinė kreivė pasuka į dešinę kampu $\frac{\pi}{k+1}$.

Kritinio taško indeksas sudarytas iš spektrinių kreivių, susikertančių tame taške ir nesančių pastoviųjų tikrinių reikšmių taškais, indeksų. Kompleksinio (pirmosios eilės) kritinio taško indeksas sudarytas iš į jį įeinančių spektrinių kreivių indeksų ir pirmasis indeksas visada mažesnis. Jeigu kritinis taškas yra realusis, tai kairysis indeksas sutampa su spektrinės kreivės, kuri apibrėžta mažesnėmis realiosiomis λ reikšmėmis, numeriu, o dešinysis – didesnėmis reikšmėmis. Likusius indeksus įterpiame didėjimo tvarka tarp kairiojo ir dešiniojo (žiūrėti 5.1(b)–5.4(b) pav.).

Pirmosios eilės kritiniai taškai gali būti dviejų tipų: realieji ir kompleksiniai. Pirmosios eilės realusis kritinis taškas $b \in \mathbb{C}_q$, $b^2 \in \mathbb{R}$, randamas išsprendus lygtį (fiksuotiems ξ_1 ir ξ_2)

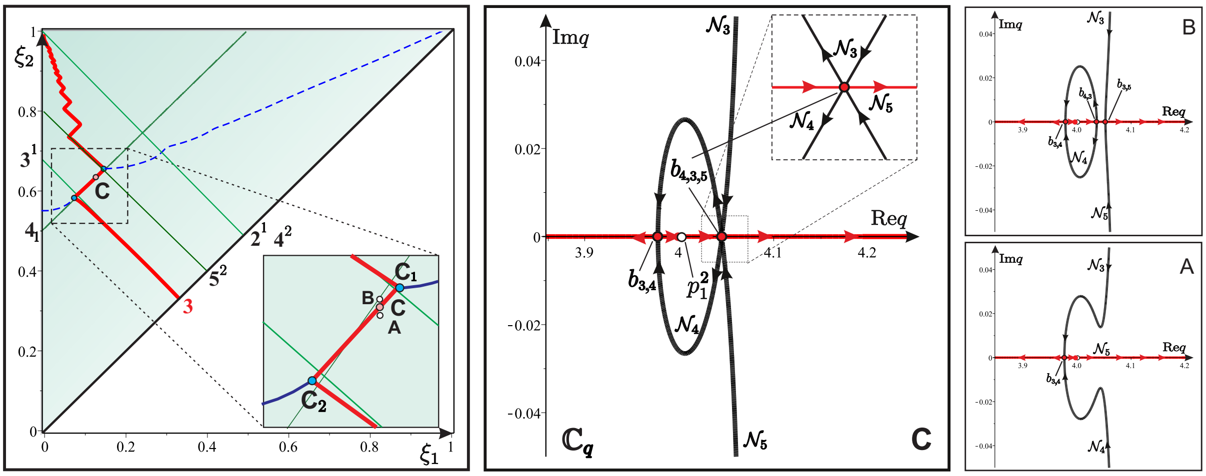
$$\gamma'(b; \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Taškas $q = 0$ yra pirmosios eilės kritinis taškas srityje $\mathbb{C}_q$, bet dėl šakojimosi savybės $\lambda = 0$ nėra kritinis plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$. Pirmosios eilės kompleksinis kritinis taškas $b = x + \imath y \in \mathbb{C}_q$,



(a) (b) (c)

5.2 pav.: (a) antrosios eilės kritinio taško trajektorija fazinėje erdvėje, $C = (0.35266, 0.85601\ldots)$; (b)–(c) spektrinės kreivės antrosios eilės kritinio taško C aplinkoje



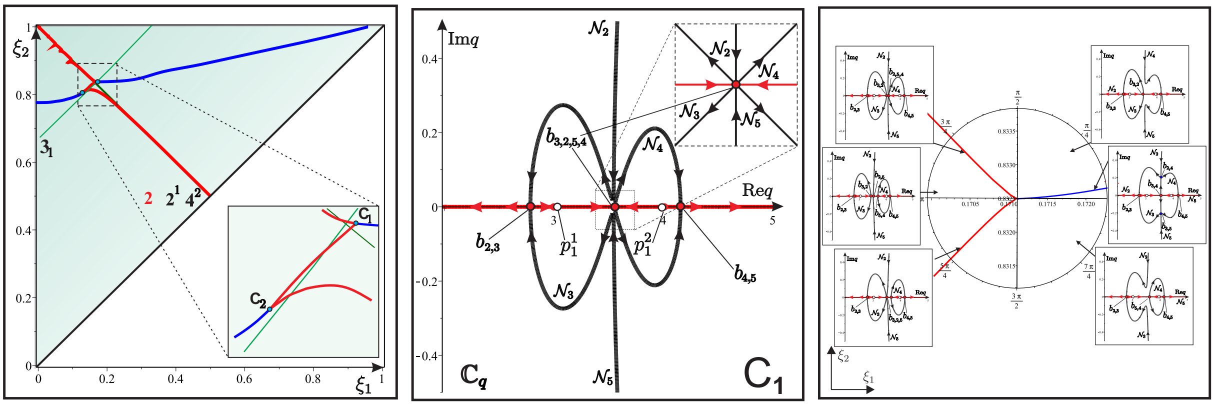
(a) (b) (c)

5.3 pav.: (a) antrosios eilės kritinio taško trajektorija fazinėje erdvėje, $C = (0.11625, 0.616239\ldots)$, $A = (0.11625, 0.616238\ldots)$, $B = (0.11625, 0.616240\ldots)$, $C_1 = (0.15454\ldots, 0.64970\ldots)$, $C_2 = (0.07331\ldots, 0.57495\ldots)$; (b)–(c) spektrinės kreivės antrosios eilės kritinio taško C aplinkoje

$b^2 \notin \mathbb{R}$, yra lygčių sistemos

$$\operatorname{Im}\gamma(b;\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \operatorname{Re}\gamma'(b;\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \operatorname{Im}\gamma'(b;\boldsymbol{\xi}) = 0$$

sprendinys. Darbe surasta tokio tipo kritinio taško trajektorija fazinėje erdvėje $S_{\boldsymbol{\xi}}$ (žiūrėti 5.1(a) pav.). Spektrinės kreivės srityje $\mathbb{C}_q$, kai $\boldsymbol{\xi} = C = (0.39893, 0.73649...)$, pateiktos 5.1(b) pav. Taškų šios trajektorijos aplinkoje spektrinių kreivių vaizdas yra skirtingas (žiūrėti 5.1(a) ir 5.1(c) pav., taškai A ir B). 5.1(b) pav. taškai $b_{4,5}$, $b_{5,6}$ ir $b_{6,7}$ yra pirmosios eilės realieji, o $b_{5,7}$, $b_{4,6}$ – kompleksiniai kritiniai taškai. Bifurkacijos taškuose kritinio taško indeksas gali keistis (žiūrėti 5.1(c) pav.).



(a) (b) (c)

5.4 pav.: (a) antrosios eilės kritinio taško ir pirmosios eilės kompleksinio kritinio taško trajektorijų susikirtimas fazinėje erdvėje; (b) trečiosios eilės kritinis taškas $C_1 = (0.17122\ldots, 0.83250\ldots)$; (c) bifurkacijos diagrama trečiosios eilės kritinio taško aplinkoje

Diferencialiniam uždaviniui (1)–(3) egzistuoja antrosios eilės kritiniai taškai, kurie yra teigiami ir gali būti randami kaip lygčių sistemos

$$\gamma'(b;\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \gamma''(b;\boldsymbol{\xi}) = 0$$

sprendiniai. Antrosios eilės kritinių taškų trajektorijos fazinėje erdvėje pavaizduotos 5.2(a) ir 5.3(a) pav. Spektrinės kreivės, kai taškas C priklauso trajektorijai fazinėje erdvėje, pateiktos 5.2(b) ir 5.3(b) pav. Jei taškas nepriklauso šioms trajektorijoms, tai spektrinių kreivių elgesys kokybiškai panašus: vienu atveju vietoje antrosios eilės kritinio taško atsiranda du pirmosios eilės kritiniai taškai, kitu atveju antrosios eilės kritinis taškas išnyksta (žiūrėti 5.2(c) ir 5.3(c) pav.). Taip pat iš 5.3(a) pav. galima pastebėti, kad trūkis, kuris buvo kompleksinio kritinio taško trajektorijoje (nuo taško C_1 iki C_2), yra antrosios eilės kritinio taško trajektorijos fazinėje erdvėje dalis. Skaitiniai eksperimentai rodo, kad tokie trūkiai atsiranda tik tada, kai $\xi_1 + \xi_2 \lessapprox 1$ (žiūrėti 5.1(a) pav., 5.3(a) pav., 5.4(a) pav.). Taškai C_1 ir C_2 atitinka trečiosios eilės kritinius taškus, kurie yra teigiami ir randami iš sistemos

$$\gamma'(b;\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \gamma''(b;\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \gamma'''(b;\boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Spektrinės kreivės šiame taške pateiktos 5.4(b) pav., o 5.4(c) pav. pateikta bifurkacijos diagrama to taško aplinkoje. Antrosios eilės kritinių taškų trajektorija fazinėje erdvėje $S_{\boldsymbol{\xi}}$ trečiosios eilės kritiniuose taškuose keičia kryptį, t.y. trečiosios eilės kritiniai taškai yra antrosios eilės kritinio taško trajektorijos mazgai. Skaitiniai eksperimentai rodo, kad trečiosios eilės kritiniai taškai neegzistuoja, kai $\xi_1 + \xi_2 \gtrapprox 1$.

Disertacijoje ištirtos spektrinės kreivės taško $q = 0$ aplinkoje. Charakteristinės funkcijos

$\gamma(q)$ Teiloro eilutė taške $q = 0$ yra

$$\gamma(q) = \frac{2}{\xi_2^2 - \xi_1^2} - \frac{2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_2^2 - \xi_1^2} q^2 + \mathcal{O}(q^4). \tag{11}$$

Daugiklis prie q^2 visada neigiamas. Taške $q = 0$ spektrinė kreivė $\mathcal{N}_1$ statmenai pasuka į dešinę. Todėl $q = 0$ yra pirmosios eilės kritinis taškas srityje $\mathbb{C}_q$ ir $\lambda = 0$ nėra kritinis taškas kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$, nes $\lambda = 0$ yra atvaizdžio $\lambda = \lambda(q)$ šakojimosi taškas.

5.2 Šturmo ir Liuvilio uždavinys su integraline nelokaliąja kraštine sąlyga (atskirieji atvejai)

Antrajame skyriuje nagrinėtas Šturmo ir Liuvilio uždavinys (1)–(2) su viena klasikine sąlyga ir kita integraline nelokaliąja kraštine sąlyga, priklausančia nuo dviejų parametrų:

$$u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1} u(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{(Atvejis 1)}, \tag{12_1}$$

$$u(1) = \gamma \int_{0}^{\xi} u(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{(Atvejis 2)}, \tag{12_2}$$

čia parametrai $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0, 1]$. Šis uždavinys atitinka ribinius pirmojo skyriaus atvejus, kurie nebuvo jame tirti. Taip pat ištirtas uždavinys, kai Dirichlė sąlyga kairiajame krašte (2) pakeičiama Noimano sąlyga

$$u'(0) = 0. \tag{13}$$

Tokius uždavinius vadiname Atvejis $1'$ ir Atvejis $2'$.

Pastaba (**Klasikinis atvejis**). Kai uždavinyje (1), (2), (12_1) ir (1), (13), (12_1) $\gamma = 0$ arba $\xi = 1$, arba uždavinyje (1), (2), (12_2) ir (1), (13), (12_2) $\gamma = 0$ arba $\xi = 0$, gauname klasikinį uždavinį, kurio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos yra gerai žinomos:

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad u_k(t) = \sin(k\pi t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{$14_{1,2}$}$$

$$\lambda_k = (k - 1/2)^2\pi^2, \quad u_k(t) = \cos((k - 1/2)\pi t), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{$14_{1',2'}$}$$

2.3 lema. *Tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai*

$$\gamma = \frac{2}{1 - \xi^2}, \qquad \gamma = \frac{2}{\xi^2}, \tag{$15_{1,2}$}$$

$$\gamma = \frac{1}{1 - \xi}, \qquad \gamma = \frac{1}{\xi}. \tag{$15_{1',2'}$}$$

Kai kuriems suformuluotiems uždaviniams pastoviosios tikrinės reikšmės jau buvo ištirtos straipsniuose [2, 3, Pečiulytė *ir kiti* 2005, 2008]. Visos pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik racionalioms parametro $\xi = m/n \in (0,1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, reikšmėms. Nepastoviosios tikrinės reikšmės, priklausančios nuo γ, yra randamos kaip charakteristinės funkcijos

$$\gamma(q) := \frac{\pi q \sin(\pi q)}{\cos(\xi \pi q) - \cos(\pi q)} = \frac{\pi q \sin(\pi q)}{2\sin((1+\xi)\pi q/2)\sin((1-\xi)\pi q/2)}, \tag{16_1}$$

$$\gamma(q) := \frac{\pi q \sin(\pi q)}{1 - \cos(\xi \pi q)} = \frac{\pi q \sin(\pi q)}{2\sin^2(\xi \pi q/2)}, \tag{16_2}$$

$$\gamma(q) := \frac{\pi q \cos(\pi q)}{\sin(\pi q) - \sin(\xi \pi q)} = \frac{\pi q \cos(\pi q)}{2\cos((1+\xi)\pi q/2)\sin((1-\xi)\pi q/2)}, \tag{$16_{1'}$}$$

$$\gamma(q) := \frac{\pi q \cos(\pi q)}{\sin(\xi \pi q)} \tag{$16_{2'}$}$$

γ taškai. Pažymėkime $\mathbb{N}_o = 1, 3, 5, \ldots$, $\mathbb{N}_e = 2, 4, 6, \ldots$ ir $\mathbb{N}_n = \{nk : k \in \mathbb{N}\}$.

2.4 lema. *Funkcijos Z nuliai yra pirmosios eilės ir teigiami:*

$$z_k := k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{$17_{1,2}$}$$

$$z_k := (k - 1/2), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{$17_{1',2'}$}$$

2.5 lema. *Uždavinio (1), (2), (12_2) taškai $p_k^{12} = 2k/\xi, k \in \mathbb{N}$, yra funkcijos P_ξ antrosios eilės nuliai (funkcijos P_ξ pirmosios eilės nulių šiame uždavinyje nėra). Kitiems uždaviniams turime vieną arba dvi funkcijos P_ξ pirmosios eilės nulių šeimas:*

$$p_k^1 := \frac{2k}{1+\xi}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \textit{ir} \qquad p_l^2 := \frac{2l}{1-\xi}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{18_1}$$

$$p_k^1 := \frac{2(k-1/2)}{1+\xi}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \textit{ir} \qquad p_l^2 := \frac{2l}{1-\xi}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{$18_{1'}$}$$

$$p_k^1 := \frac{k}{\xi}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{$18_{2'}$}$$

Jeigu $\xi \notin \mathbb{Q}$, tai pastoviųjų tikrinių reikšmių nėra, o taškai p_k^{12} yra uždavinio (1), (2), (12_2) antrosios eilės poliai ($p_k^1, k \in l$, $p_l^2, l \in \mathbb{N}$ yra charakteristinės funkcijos pirmosios eilės poliai).

2.6 lema. *Jeigu $\xi \in \mathbb{Q}$, tada taškai $q_j = j \in \mathbb{N}_n$, kai $n - m \in \mathbb{N}_e$ arba $q_j = j \in \mathbb{N}_{2n}$, kai $n - m \in \mathbb{N}_o$ yra uždavinio (1), (2), (12_1) charakteristinės funkcijos pirmosios eilės poliai ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai. Kitu atveju funkcijos P_ξ nuliai yra charakteristinės funkcijos antros eilės poliai.*

Uždavinio (1), (2), (12_2) taškai $p_k^{12} = k/m$, $k \in \mathbb{N}_{2n}$, yra antrosios eilės poliai, išskyrus atvejus, kai $k \in \mathbb{N}_{mn}$, $m \in \mathbb{N}_e$, ir $k \in \mathbb{N}_{2mn}$, $m \in \mathbb{N}_o$. Tokie taškai yra pirmosios eilės poliai pastoviųjų tikrinių reikšmių taškuose. Jeigu $m = 1$ arba $m = 2$, tai antrosios eilės polių nėra.

2.7 lema. *Tarkime* $\xi \in \mathbb{Q}$, $(n-m)/\mathrm{dbd}(n+m, n-m) \in \mathbb{N}_e$, $n, m \in \mathbb{N}_o$, *tada uždavinio* (1), (13), (12_1) *pirmosios šeimos taškai* $p_k^1 = 2n(k-1/2)/(n+m)$, $k \in \mathbb{N}$, *sutampa su antrosios šeimos taškais* $p_l^2 = 2nl/(n-m)$, $l \in \mathbb{N}$, *taškuose:*

$$p_t^{12} = 2n\left(\frac{n-m}{\mathrm{dbd}(n+m, n-m)}t + l_0\right)/(n-m), \qquad t \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

čia (k_0, l_0) *yra bet kuris lygties*

$$\frac{n-m}{\mathrm{dbd}(n+m, n-m)}k - \frac{n+m}{\mathrm{dbd}(n+m, n-m)}l - \frac{n-m}{2 \cdot \mathrm{dbd}(n+m, n-m)} = 0, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

sprendinys, toks, kad $-\frac{n-m}{\mathrm{dbd}(n+m,n-m)} < l_0 \leqslant 0$.

2.9 lema. *Tarkime,* $\xi = m/n \in \mathbb{Q}$, *ir* $(n-m)/\mathrm{dbd}(2n, n+m) \in \mathbb{N}_e$, $n, m \in \mathbb{N}_o$, *tada uždavinio* (1), (13), (12_1) *pirmosios šeimos taškai* $p_k^1 = 2n(k-1/2)/(n+m)$, $k \in \mathbb{N}$, *sutampa su nuliais* $z_l = l - 1/2$, $l \in \mathbb{N}$, *pastoviųjų tikrinių reikšmių taškuose*

$$c_t^1 = l_0 + \frac{2nt}{\mathrm{dbd}(2n, n+m)} - \frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

čia (k_0, l_0) *yra bet kuris lygties*

$$\frac{2n}{\mathrm{dbd}(2n, n+m)}l - \frac{n+m}{\mathrm{dbd}(2n, n+m)}k - \frac{n-m}{2 \cdot \mathrm{dbd}(2n, n+m)} = 0, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

sprendinys, toks, kad $-\frac{2n}{\mathrm{dbd}(2n,n+m)} < l_0 - 1/2 \leqslant 0$.

2.10 lema. *Tarkime,* $\xi = m/n \in \mathbb{Q}$, *ir* $(n-m)/\mathrm{dbd}(2n, n-m) \in \mathbb{N}_e$, $n, m \in \mathbb{N}_o$, *tada uždavinio* (1), (13), (12_1) *antrosios šeimos taškai* $p_k^2 = 2k/(n-m)$, $k \in \mathbb{N}$, *sutampa su taškais* $z_l = l - 1/2$, $l \in \mathbb{N}$, *pastoviųjų tikrinių reikšmių taškuose*

$$c_t^2 = l_0 + \frac{2nt}{\mathrm{dbd}(2n, n-m)} - \frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

čia (k_0, l_0) *yra bet kuris lygties*

$$\frac{2n}{\mathrm{dbd}(2n, n-m)}l - \frac{n-m}{\mathrm{dbd}(2n, n-m)}k - \frac{n-m}{2 \cdot \mathrm{dbd}(2n, n-m)} = 0, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

sprendinys, toks, kad $-\frac{2n}{\mathrm{dbd}(2n,n-m)} < l_0 - 1/2 \leqslant 0$.

Uždaviniams (1), (2), (12_1) ir (1), (13), (12_1) egzistuoja tik realiosios tikrinės reikšmės [2, 3, Pečiulytė *ir kiti* 2005, 2008]. Realioji charakteristinė funkcija visuose intervaluose (α, β) yra mažėjanti, čia α ir β yra pirmosios eilės poliai. Taigi, jeigu poliai p_k^1 ir p_l^2 didėjant parametro ξ reikšmei juda link nulio z_s, tai charakteristinės funkcijos grafiko dalis, esanti intervale (p_l^2, p_k^1), tampa vertikalia tiese, t.y. gauname pastoviosios tikrinės reikšmės tašką $c_t^{12} = p_k^1 = p_l^2 = z_s$. Parametro ξ reikšmei didėjant, poliai apsikeičia vietomis pastoviosios tikrinės reikšmės taške, kuris taip pat yra pirmosios eilės polius.

Uždaviniui (1), (2), (12_2) egzistuoja dviejų tipų bifurkacijos taškai. Kai dvi spektrinės kreivės susijungia pirmosios eilės kompleksiniame kritiniame taške, gauname pirmojo tipo bifurkacijos tašką ξ_c. Antrojo tipo bifurkacijos taškas ξ_k gaunamas, kai polius, nulis ir realusis pirmosios eilės kritinis taškas sutampa, t.y. gauname pastoviąją tikrinę reikšmę ir kilpos tipo spektrinės kreivės dalis kompleksinėje plokštumoje išnyksta.

Uždavinio (1), (13), (12_2) pirmojo tipo bifurkacijos taške dvi spektrinės kreivės kilpos susijungia antrosios eilės realiajame kritiniame taške, o antrojo tipo bifurkacijos taške susitraukia spektrinių kreivių suformuota kilpa, kurios viduje yra polius ir nulis. Kilpai susitraukus, kritinis taškas sutampa su pastoviosios tikrinės reikšmės tašku. Didėjant parametro ξ reikšmei vėl atsidanda nulis ir polius.

Šturmo ir Liuvilio uždavinys su integraline kraštine sąlyga, kai integruojama simetriniame intervale

Taip pat antrajame skyriuje nagrinėjamas Šturmo ir Liuvilio uždavinys (1)–(2) su klasikine sąlyga kairiajame taške ir kita nelokaliąja integraline kraštine sąlyga, kai $0 < \xi < 1/2$:

$$u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1-\xi} u(t)\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Pastoviosios tikrinės reikšmės randamos kaip lygties ir lygčių sistemos sprendiniai:

$$\sin(\frac{\pi q}{2}) = 0; \qquad \begin{cases} \cos(\frac{\pi q}{2}) = 0, \\ \sin(\frac{\pi q(1-2\xi)}{2}) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Pirmosios sistemos sprendiniai nepriklauso nuo parametro ξ, todėl tokias pastoviąsias tikrines reikšmes vadinsime pirmojo tipo. Antrojo tipo pastoviosios tikrinės reikšmės priklauso nuo ξ ir jos randamos iš antrosios lygčių sistemos (žiūrėti (23)).

2.11 lema. *Pirmojo tipo pastoviosios tikrinės reikšmės yra* $\lambda_k = (\pi c_k^1)^2$, $c_k^1 = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. *Antrojo tipo pastoviosios tikrinės reikšmės egzistuoja tik tada, kai* $\xi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_e$, $n/2 \in \mathbb{N}_o$, $\mathrm{dbd}(n/2, m) = 1$, *ir šios pastoviosios tikrinės reikšmės yra* $\lambda_k = (\pi c_k^2)^2$, $c_k^2 = \frac{n}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Nepastoviosios tikrinės reikšmės randamos kaip charakteristinės funkcijos

$$\gamma(q) := \frac{\pi q \cos(\pi q/2)}{\sin\big(\pi q(1-2\xi)/2\big)} \tag{24}$$

γ taškai. Funkcijos $Z(q)$ nuliai yra pirmosios eilės ir jie yra lygūs $z_l = 2l-1, l \in \mathbb{N}$. Funkcijos $p_\xi(q)$ nuliai taip pat yra pirmosios eilės ir teigiami:

$$p_k^1 = \frac{2k}{1-2\xi}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

2.12 lema. *Tarkime, $\xi = m/n \in \mathbb{Q}$, tada taškai p_l^1, $l = \frac{n-2m}{\mathrm{dbd}(n,2)}t$, $t \in \mathbb{N}$ sutampa su pirmojo tipo pastoviųjų tikrinių reikšmių taškais c_k^1. Jeigu $m \in \mathbb{N}_o$, $n \in \mathbb{N}_e$, $n/2 \in \mathbb{N}_o$, $\mathrm{dbd}(n/2, m) = 1$, tada p_l^1, $l = \frac{n-2m}{4}(2t+1)$, $t \in \mathbb{N}$, yra antrojo tipo pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai. Kitu atveju taškai p_l^1 yra charakteristinės funkcijos pirmosios eilės poliai.*

Šio uždavinio atveju taip pat buvo rasti dviejų tipų bifurkacijos taškai: polius, nulis ir du pirmosios eilės kritiniai taškai sutampa pastoviosios tikrinės reikšmės taške; dvi spektrinių kreivių kilpos susijungia antrosios eilės kritiniame taške.

5.3 Diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys

Intervale $[0,1]$ įvedame tolygųjį tinklą $\overline{\omega}^h = \{t_j = jh, j = \overline{0,n};\ nh = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, ir $\mathbb{N}^h := (0,n) \cap \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{N}}^h := \mathbb{N} \cup \{0,n\}$. Taip pat darome prielaidą, kad ξ_1 ir ξ_2 sutampa su tinklo taškais, t.y. $\xi_1 = m_1 h = m_1/n$, $\xi_2 = m_2 h = m_2/n$, $\boldsymbol{m} \in S_{\boldsymbol{\xi}}^h := \{(m_1, m_2)\colon 0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant n, m_1, m_2 \in \overline{\mathbb{N}}^h\}$. Taip pat įtraukiame žymėjimą, kad $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{m}/n = (m_1/n, m_2/n)$. Pažymėkime $\xi = \xi_1/\xi_2 = m_1/m_2$, $\xi_+ = \xi_1 + \xi_2 = m_+/n$, $\xi_- = \xi_2 - \xi_1 = m_-/n$, čia $m_+ := m_1 + m_2$, $m_- := m_2 - m_1$.

Diferencialiniam (1)–(3) uždaviniui galime užrašyti jį atitinkančią skirtuminę lygčių sistemą

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}^h, \tag{26}$$

$$U_0 = 0, \qquad U_n = \gamma[\chi_{[\xi_1,\xi_2]}, U] = \gamma h\Big(\frac{U_{m_1} + U_{m_2}}{2} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} U_k\Big), \tag{27}$$

čia

$$[U,V] = \sum_{j=0}^{n} U_j V_j,$$

$$\chi_{[\xi_1,\xi_2],j} = \chi_{[\xi_1,\xi_2]}(t_j) = \begin{cases} 0, & \text{kai } t_j < \xi_1, \text{ arba } t_j > \xi_2, \\ \frac{h}{2}, & \text{kai } t_j = \xi_1, \text{ arba } t_j = \xi_2, \\ h, & \text{kai } \xi_1 < t_j < \xi_2, \end{cases} \qquad t_j \in \overline{\omega}^h, \tag{28}$$

$\xi_1, \xi_2 \in \overline{\omega}^h$ ir $\xi_1 < \xi_2$, t.y., $\xi_1 = t_{m_1} = m_1 h$, $b = t_{m_2} = m_2 h$, $m_1, m_2 \in \overline{\mathbb{N}}^h$. Formulė (27) yra integralo $\int_{\xi_1}^{\xi_2} u(t)\,dt$ aproksimacija trapecijų formule.

3.1 lema. *Tegul $t \in \overline{\omega}^h$. Tada yra teisingos šios lygybės:*

$$[\chi_{[a,b]}, e^{\imath zt}] = he^{\imath z(a+b)/2} \sin\frac{z(b-a)}{2} \mathrm{tg}^{-1}\frac{zh}{2}, \tag{29}$$

$$[\chi_{[a,b]}, \cos(zt)] = h\sin\frac{z(b-a)}{2}\cos\frac{z(b+a)}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{zh}{2}, \tag{30}$$

$$[\chi_{[a,b]}, \sin(zt)] = h\sin\frac{z(b-a)}{2}\sin\frac{z(b+a)}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{zh}{2}. \tag{31}$$

Pažymėkime $\mathbb{C}_q^h := \mathbb{R}_q^{h-} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_q^h \cup \{n\} \cup \mathbb{R}_q^{h+} \cup \mathbb{C}_q^{h+} \cup \mathbb{C}_q^{h-}$, čia $\mathbb{R}_q^h := \{q = x \colon 0 < x < n\}$, $\mathbb{R}_q^{h-} := \{q = \imath y \colon y > 0\}$, $\mathbb{R}_q^{h+} := \{q = n + \imath y \colon y > 0\}$, $\mathbb{C}_q^{h+} := \{q = x + \imath y \colon 0 < x < n, y > 0\}$, $\mathbb{C}_q^{h-} := \{q = x + \imath y \colon 0 < x < n, y < 0\}$. Neigiamas tikrines reikšmes atitinka $q = \imath y, y > 0$, teigiamas iš intervalo $(0; 4/h^2)$ atitinka $q = x \in (0; n)$, teigiamas iš intervalo $(4/h^2; +\infty)$ atitinka $q = n + \imath y, y > 0$. Atvaizdis

$$\lambda = \lambda^h(q) := \tfrac{4}{h^2}\sin^2(\pi q h/2) \tag{32}$$

yra bijekcija iš $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}$ į $\mathbb{C}_q^h$, o taškai $\lambda = 0$ $(q = 0)$ ir $\lambda = 4/h^2$ $(q = n)$ yra atvaizdžio $\lambda^h(q)$ pirmos eilės šakojimosi taškai. Taip pat naudosime bijekciją $w = \lambda^h(w) := \frac{2}{h^2}(1 - (w - w^{-1})/2)$ tarp aibių $\mathbb{C}_\lambda$ ir $\mathbb{C}_w^h := \{w \in \mathbb{C} : |w| \leqslant 1, w \neq 0\}$, kad galėtume ištirti funkcijas $\lambda = \infty$ aplinkoje. Taškai $w = \pm 1$ atitinka atvaizdžio šakojimosi taškus, o $w = 0$ atitinka $\lambda = \infty$ $(q = \infty)$.

Pasinaudodami formule (32), lygtį (26) galime perrašyti kita forma

$$U_{j+1} - 2\cos(\pi q h)U_j + U_{j-1} = 0, \qquad j \in \mathbb{N}^h, \tag{33}$$

čia $q = x + \imath y \in \mathbb{C}_q^h$. Uždavinio (33) bendrasis sprendinys yra:

$$\begin{aligned} &U = C_1\sin(\pi q t_j) + C_2\cos(\pi q t_j),\ \text{kai } q \neq 0, n;\\ &U = C_1 t_j + C_2,\ \text{kai } q = 0;\\ &U = C_1(-1)^j t_j + C_2(-1)^j,\ \text{kai } q = n. \end{aligned} \tag{34}$$

Kraštinei sąlygai $U_0 = 0$ gauname, kad $C_2 = 0$, todėl tikrinių funkcijų pavidalas yra: $V = t_j$, kai $q = 0$; $V = (-1)^j t_j$, kai $q = n$, $V = \sin(\pi q t_j)$, kai $q \neq 0, n$. Įrašę šiuos sprendinius į nelokaliąją kraštinę sąlygą, gauname, kad uždavinio (26)–(27) tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ $(q = 0)$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{2n^2}{m_2^2 - m_1^2}$. Tikrinė reikšmė $\lambda = 4/h^2$ $(q = n)$ egzistuoja tada ir tik tada, kai:

$$\gamma=\frac{2}{h^2}N_0,\qquad N_0:=\frac{2(-1)^{n-m_2}}{1-(-1)^{m_2-m_1}}=\begin{cases}\infty, & \text{kai } m_2-m_1\in\mathbb{N}_e,\\ +1, & \text{kai } m_2-m_1\in\mathbb{N}_o,\ n-m_2\in\mathbb{N}_e,\\ -1, & \text{kai } m_2-m_1\in\mathbb{N}_o,\ n-m_2\in\mathbb{N}_o.\end{cases}$$

Papildomai įvedame funkciją $Z^h(z):=Z(z)\cdot\frac{2}{h}\mathrm{tg}(\pi zh/2)$, o funkcijos $Z(z)$, $P_{\boldsymbol{\xi}}(z)$, $P^1_{\boldsymbol{\xi}}(z)$ ir $P^2_{\boldsymbol{\xi}}(z)$ apibrėžtos formulėmis (4) ir (5), kai nagrinėjome diferencialinį uždavinį. Funkcijų $Z(q)$, $Z^h(q)$, $q\in\mathbb{C}^h_q$, nuliai sutampa su tikrinių reikšmių taškais klasikiniu atveju ($\gamma=0$). Diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio tikrines reikšmes galima rasti naudojant lygties

$$Z^h(q)=\gamma P_{\boldsymbol{\xi}}(q) \tag{35}$$

sprendinius srityje $\mathbb{C}^h_q$ ir išraišką (32). Diskrečiajam Šturmo ir Liuvilio uždaviniui (26)–(27) pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai randami kaip lygčių sistemos

$$Z(q)=0,\quad P_{\boldsymbol{\xi}}(q)=0,\quad q\in(0,n),$$

sprendiniai. Pastoviųjų tikrinių reikšmių taškų aibę žymime $\mathcal{C}$ arba $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\xi}}$. Taškai $q\notin\mathbb{N}^h$ tokie, kad $Z^h(q)\neq0$, bet $P_{\boldsymbol{\xi}}(q)=0$, vadinami poliais. Lygtį (35) atitinka kompleksinė meromorfinė funkcija

$$\gamma_c(z)=\frac{Z^h(z)}{P_{\boldsymbol{\xi}}(z)},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{36}$$

Aibėje $\mathcal{N}^\gamma:=\{q\in\mathbb{C}^h_q\colon \mathrm{Im}\gamma_c(q)=0\}$ iš kompleksinės charakteristinės funkcijos gauname $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinę funkciją

$$\gamma(q)=\frac{\sin(\pi q)}{\cos(\pi\xi_1 q)-\cos(\pi\xi_2 q)}\cdot\frac{2}{h}\mathrm{tg}(\pi qh/2). \tag{37}$$

Egzistuoja riba

$$\gamma(\infty)=\lim_{q\to\infty}\gamma(q)=\frac{2}{h}N_1,\quad N_1=\begin{cases}\infty, & m_2\neq n;\\ 1, & m_2=n.\end{cases}$$

Visi funkcijų Z, $P^1_{\boldsymbol{\xi}}$, $P^2_{\boldsymbol{\xi}}$ intervale $(0,+\infty)$ nuliai yra paprasti, realūs ir teigiami:

$$z_k=k\in\mathbb{N},\quad p^1_k=\tfrac{2}{\xi_+}k,\ k\in\mathbb{N},\quad p^2_k=\tfrac{2}{\xi_-}k,\ k\in\mathbb{N}. \tag{38}$$

Šių nulių aibes žymėsime Z, P^1, P^2. Apibrėžkime $\overline{\mathcal{Z}}:=Z\cap(0,n)$, $\overline{\mathcal{Z}}^1_{\boldsymbol{\xi}}:=P^1\cap(0,n]$, $\overline{\mathcal{Z}}^2_{\boldsymbol{\xi}}:=P^2\cap(0,n]$. Poliai ir pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai gali būti rasti pagal formules

$$p^1_k=2nk/m_+,\quad p^2_k=2nk/m_-,\quad p^{12}_k=2nk/\mathrm{dbd}(m_+,m_-),$$
$$c^1_k=2nk/\mathrm{dbd}(2n,m_+),\ c^2_k=2nk/\mathrm{dbd}(2n,m_-),\ c^{12}_k=2n/\mathrm{dbd}(2n,m_+,m_-),$$

ir šie taškai atitinkamai priklauso aibėms: $\mathcal{P}^1_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{P}^2_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{P}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{C}^1_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{C}^2_{\boldsymbol{\xi}}+\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathcal{C}^{12}_{\boldsymbol{\xi}}$. Jeigu aibė nėra tuščia, visi šių aibių taškai turi pavidalą $q_k = \alpha k$, $k \in \mathbb{N}^\star := \{k \in \mathbb{N}, k = 1 \ldots k_{\max}\}$, čia $k_{\max} = \lfloor n/q_1 \rfloor$ poliams ir $k_{\max} = \lfloor (n-1)/q_1 \rfloor$ pastoviosioms tikrinėms reikšmėms, $\alpha \geqslant 1$ ir q_1 ($q_1 = p^1_1$, p^2_1, p^{12}_1, c^1_1, c^2_1, c^{12}_1).

Kai $m_2 + m_1 = n$, tai pastoviosios tikrinės reikšmės nepriklauso nuo nelokaliosios integralinės kraštinės sąlygos parametrų ($c^1_1 = 2$).

Disertacijoje ištirtos spektrinės kreivės taškų $q = 0$, $q = n$ ir $q = \infty$ aplinkoje.

Taškas $\boldsymbol{q = 0}$. Charakteristinės funkcijos $\gamma(q)$ Teiloro eilutė taške $q = 0$ yra

$$\gamma(q) = \frac{2n^2}{m_2^2 - m_1^2} + \frac{1}{6(m_2^2 - m_1^2)}(1 - 2n^2 + m_2^2 + m_1^2)q^2 + \mathcal{O}(q^4). \tag{39}$$

Antrasis narys visada neigiamas. Taške $q = 0$ spektrinė kreivė $\mathcal{N}_1$ statmenai pasuka į dešinę. Todėl $q = 0$ yra pirmosios eilės kritinis taškas srityje $\mathbb{C}^h_q$ ir $\lambda = 0$ nėra kritinis taškas kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$.

Taškas $\boldsymbol{q = n}$. Jei $m_- = m_2 - m_1 \in \mathbb{N}_e$, tada $q = n$ polius, kuris yra antrosios eilės, bet dėl šakojimosi savybės $\lambda = 4/h^2$ yra pirmosios eilės polius plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$. Jei $m_- \in \mathbb{N}_o$, tai $\gamma(n) = 2N/h^2$, $|N| = 1$, ir charakteristinės funkcijos $\gamma(q)$ Teiloro eilutė taške $q = n$ yra

$$\begin{aligned}\gamma(q) := 2Nn^2 - \frac{N}{2}\left(\frac{1+2n^2}{3} - (m_2^2 + m_1^2)\right)(q-n)^2 + \\ - \frac{N}{24n^2}\Bigg(\frac{6n^4 + 10n^2 - 1}{15} - (m_2^4 + m_1^4) + \\ + (3(m_2^2 + m_1^2) - 2n^2 - 1)(m_2^2 + m_1^2)\Bigg)(q-n)^4 + \mathcal{O}((q-n)^6).\end{aligned} \tag{40}$$

Jei yra tenkinama sąlyga

$$m_2^2 + m_1^2 = (1 + 2n^2)/3, \tag{41}$$

taškas $q = n$ yra trečiosios eilės kritinis taškas srityje $\mathbb{C}^h_q$, o $\lambda = 4/h^2$ pirmosios eilės kritinis taškas plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$. Jei sąlyga (41) nėra tenkinama, srityje $\mathbb{C}^h_q$ taškas $q = n$ yra pirmosios eilės kritinis taškas, o kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$ taškas $\lambda = 4/h^2$ nėra kritinis.

Taško $\boldsymbol{q = \infty}$ aplinka. Pasinaudojant Oilerio formule lygtį (37) galima perrašyti kita forma:

$$\gamma(q) = \frac{e^{\imath\pi q} - e^{-\imath\pi q}}{e^{\imath\pi q\xi_1} + e^{-\imath\pi q\xi_1} - e^{\imath\pi q\xi_2} - e^{-\imath\pi q\xi_2}} \cdot \frac{1 - e^{\pi q h}}{1 + e^{\pi q h}} \cdot \frac{2}{h}. \tag{42}$$

Tada lygtį (42) galima perrašyti kintamojo w atžvilgiu

$$\begin{aligned}\gamma(w) &= \frac{w^n - w^{-n}}{w^{m_1} + w^{-m_1} - w^{m_2} - w^{-m_2}} \cdot \frac{1-w}{1+w} \cdot \frac{2}{h} \\ &= \frac{w^{-n}}{w^{-m_2}} \cdot \frac{(1-w^{2n})(1-w)}{(1-w^{m_2+m_1} - w^{m_2-m_1} + w^{2m_2})(1+w)} \cdot \frac{2}{h},\end{aligned} \tag{43}$$

kai $w \in \mathbb{C}_w^h$.

3.4 lema. *Taško $w = 0$ aplinkoje yra teisinga*

$$\gamma(w) = \frac{1}{w^{n-m_2}} \cdot \frac{2}{h} \cdot (1 + \mathcal{O}(w)). \tag{44}$$

Taškas $w = 0 \notin \mathbb{C}_w^h$ yra izoliuotas ypatingasis taškas. Jei $m_2 = n$, tai $\lim_{w\to 0} \gamma(w) = 2/h$ ir taškas $w = 0$ yra pašalinamas ypatingasis taškas. Tokiu atveju ta pati realioji spektrinė kreivė įeina į tašką $w = 0$ ir išeina iš šio taško. Jei $m_2 \leqslant n - 1$, taškas $w = 0$ yra polius, o skirtumas $n - m_2$ nusako poliaus eilę (žiūrėti lygtį (44)). Kai $n - m_2 = 1$, tai viena realioji ($\mathcal{N}_1 \subset (-1, 0)$) spektrinė kreivė artėja į tašką $w = 0$ ir viena realioji ($\mathcal{N}_{n-1} \subset (0, 1)$) tolsta nuo taško $w = 0$, kai $\gamma \to \pm\infty$. Visos spektrinės kreivės, išskyrus pastoviąsias tikrines reikšmes, artėja prie poliaus ir tolsta nuo poliaus. Skaičius $n_\infty = n - m_2$ apibrėžia spektrinių kreivių skaičių taško $q = \infty$ aplinkoje.

3.5 lema. *Galioja sąryšis $n_p + n_{ce} + 1 = m_2$, čia n_p polių skaičius (įskaitant ir polių eilę), o n_{ce} yra pastoviųjų tikrinių reikšmių skaičius.*

3.6 lema. *Kritinių taškų (įskaitant ir jų eilę) skaičius srityje $\mathbb{C}_q^h$ yra $n_{cr} = n_\infty + n_c + n_{2p} - 1$, čia n_{2p} yra antrosios eilės polių skaičius, n_c yra grynai kompleksinių spektrinių kreivių skaičius tarp dviejų kritinių taškų.*

3.7 lema. *Jei $m_2 = n$ (nepriklausomai nuo m_1 reikšmės) kompleksinės tikrinės reikšmės neegzistuoja. Šiuo atveju taškas $q = \infty$ yra pašalinamasis ypatingasis taškas (ta pati spektrinė kreivė įeina į šį tašką ir išeina iš šio taško). Šiuo atveju taip pat egzistuoja horizontali asimptotė $\gamma(\infty) = \lim_{q\to\infty} \gamma(q) = 2/h$.*

5.4 Diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys (tam tikri atvejai)

Integralinė kraštinė sąlyga aproksimuojama pagal trapecijų formulę. Darome prielaidą, kad ξ sutampa su tinklo tašku, t.y. $\xi = mh = m/n$, $m = \overline{0, n}$, $K := \mathrm{dbd}(n, m)$ ir $N := n/K$, $M := m/K$ bei $\xi = M/N$.

Tada diferencialinius uždavinius (1)–(2), (12_1) ir (1)–(2), (12_2) atitinka skirtuminės lygčių sistemos (26)–(27), kai $m_2 = n$, $m_1 = m$ (Atvejis 1) ir $m_2 = m$, $m_1 = 0$ (Atvejis 2):

$$U_0 = 0, \quad U_n = \gamma h\Big(\frac{U_m + U_n}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} U_k\Big); \tag{45_1}$$

$$U_0 = 0, \quad U_n = \gamma h\Big(\frac{U_0 + U_m}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} U_k\Big). \tag{45_2}$$

Tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ yra tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{2}{1-\xi^2}$ ((26), (45_1) uždavinio atveju) ir $\gamma = \frac{2}{\xi^2}$ ((26), (45_2) uždavinio atveju). Uždaviniui (26), (45_1) tikrinė reikšmė $\lambda = 4/h^2$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{2}{1-(-1)^{n-m}}$ ($n - m \in \mathbb{N}_o$), ir (26), (45_2) $\gamma = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{2(-1)^n}{(-1)^m - 1}$ ($m \in \mathbb{N}_o$). Pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai yra:

$$c_k = 2Nk, \ N - M \in \mathbb{N}_o, \qquad c_k = Nk, \ N - M \in \mathbb{N}_e, \tag{46_1}$$

$$c_k = 2Nk, \ M \in \mathbb{N}_o, \qquad c_k = Nk, \ M \in \mathbb{N}_e, \tag{46_2}$$

čia $k \in \mathbb{N}$ toks, kad $c_k \in (0, n)$. Visi nepastoviųjų tikrinių reikšmių taškai randami kaip $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinės funkcijos γ taškai srityje $\mathbb{C}_q^h$.

4.1 lema. *Kai $0 \leqslant m < l \leqslant n$, diskrečiojo uždavinio*

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{47}$$

$$U_0 = 0, \quad U_n = \gamma h\Big(\frac{U_m + U_l}{2} + \sum_{k=m+1}^{l-1} U_k\Big) \tag{48}$$

charakteristinė funkcija yra

$$\gamma = \frac{\sin(\pi q h n)}{\cos(\pi q h m) - \cos(\pi q h l)} \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi q h}{2} \cdot \frac{2}{h}. \tag{49}$$

Kai $l = n$, $m = m$ (uždaviniui (26), (45_1)) ir $l = m$, $m = 0$ (uždaviniui (26), (45_2)) gauname, kad charakteristinė funkcija yra:

$$\gamma_{t1} = \frac{\sin(\pi q)}{\cos(\xi\pi q) - \cos(\pi q)} \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi q h}{2} \cdot \frac{2}{h}, \tag{50_1}$$

$$\gamma_{t2} = \frac{\sin(\pi q)}{2\sin^2(\xi\pi q/2)} \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi q h}{2} \cdot \frac{2}{h}. \tag{50_2}$$

4.2 lema. *Uždaviniui (26), (45_1) egzistuoja dviejų skirtingų šeimų pirmosios eilės nuliai: $p_k^1 = 2nk/(n+m)$, $k \in \mathbb{N}^\star$, ir $p_k^2 = 2nk/(n-m)$, $k \in \mathbb{N}^\star$. Antrajam uždaviniui ((26), (45_2)) visi nuliai $p_k^{12} = 2nk/m$, $k \in \mathbb{N}^\star$ yra antrosios eilės.*

Uždavinio (26), (45_1) pirmosios šeimos nuliai sutampa su antrosios šeimos nuliais pastoviųjų tikrinių reikšmių taškuose (kaip ir diferencialiniu atveju). Taškai $\lambda = 0$ ir $\lambda = 4/h^2$ yra funkcijos $\lambda = \lambda^h(q)$ pirmosios eilės šakojimosi taškai. Šiam uždaviniui yra tik realiosios tikrinės reikšmės. Spektro taškas $q = n$ yra polius, kai $n - m \in \mathbb{N}_e$. Kai $\gamma = \frac{2}{h}$, yra tik $n - 2$ tikrinės reikšmės.

Uždavinio (26), (45_2) spektras kai kurioms parametro $\xi = \frac{m}{n}$ reikšmėms gali būti gana sudėtingas. Taškas $q = n$ yra polius, jei $m \in \mathbb{N}_e$. Srityje $\mathbb{C}_q^h$ šis polius yra antrosios eilės ir pirmosios eilės polius kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$. Spektro struktūra priklauso nuo tinklo taškų skaičiaus n.

Integralinė kraštinė sąlyga aproksimuojama pagal Simpsono formulę. Intervale $[0, 1]$ įvedame tolygųjį tinklą $\overline{\omega}^h = \{t_j = jh, j = \overline{0, 2n};\ 2nh = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Darome prielaidą, kad ξ sutampa su tinklo tašku, t.y. $\xi = 2mh = m/n$, $m = \overline{0, n}$. Taip pat pažymėkime dviejų skaičių didžiausią bendrą daliklį $K := \text{dbd}(2n, 2m)$ ir $N := 2n/K$, $M := 2m/K$. Tada $\xi = M/N$.

Diferencialiniams uždaviniams (1)–(2), (12_1) ir (1)–(2), (12_2) galime užrašyti skirtuminę lygčių sistemą (26), kai nelokalioji sąlyga aproksimuojama pagal Simpsono formulę:

$$U_0 = 0, \quad U_{2n} = \frac{\gamma h}{3}\Big(U_{2m} + U_{2n} + 4\sum_{k=m+1}^{n} U_{2k-1} + 2\sum_{k=m+1}^{n-1} U_{2k}\Big); \tag{51_1}$$

$$U_0 = 0, \quad U_{2n} = \frac{\gamma h}{3}\Big(U_0 + U_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} U_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} U_{2k}\Big). \tag{51_2}$$

Uždavinio (26), (51) tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma = \frac{2}{1-\xi^2}$ (kai naudojama sąlyga (51_1)) ir $\gamma = \frac{2}{\xi^2}$ (kai naudojama sąlyga (51_2)).

Uždavinio (26), (51) pastoviųjų tikrinių reikšmių taškai c_k yra aprašomi formule (46) (ta pati formulė kaip ir uždaviniui (26), (45)).

4.3 lema. *Kai $0 \leqslant m < l \leqslant n$, diskrečiojo uždavinio*

$$\frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} + \lambda U_j = 0, \quad j = \overline{1, 2n-1}, \tag{52}$$

$$U_0 = 0, \qquad U_{2n} = \frac{\gamma h}{3}\Big(U_{2m} + U_{2l} + 4\sum_{k=m+1}^{l} U_{2k-1} + 2\sum_{k=m+1}^{l-1} U_{2k}\Big), \tag{53}$$

$\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinė funkcija yra

$$\gamma = \frac{\sin(\pi qhn)}{\cos(\pi qhm) - \cos(\pi qhl)} \cdot \frac{3\sin(\pi qh)}{h(2 + \cos(\pi qh))}. \tag{54}$$

Kai $l=n$, $m=m$ (uždaviniui (26), (51_1)) ir $l=m$, $m=0$ (uždaviniui (26), (51_2)), tai uždavinio (26), (51) charakteristinė funkcija yra:

$$\gamma_{S1}=\frac{\sin(2\pi qhn)}{\cos(2\pi qhm)-\cos(2\pi qhn)}\cdot\frac{3\sin(\pi qh)}{h(2+\cos(\pi qh))},\qquad (55_1)$$

$$\gamma_{S2}=\frac{\sin(2\pi qhn)}{2\sin^2(2\pi qhm/2)}\cdot\frac{3\sin(\pi qh)}{h(2+\cos(\pi qh))}.\qquad (55_2)$$

Visi charakteristinės funkcijos (γ_{S1} and γ_{S2}) nuliai yra paprasti ir teigiami $z_k=k\in\mathbb{N}$ tokie, kad $z_k\in(0;2n)$, $z_k\notin\mathcal{C}$. Poliai, esantys intervale $(0;2n)$, randami pagal tą pačią formulę kaip ir pirmiau aprašyto diskrečiojo uždavinio, kai nelokalioji integralinė sąlyga aproksimuojama pagal trapecijų formulę. Papildomas polius yra srityje $\mathbb{R}_q^{h+}:=\{q=2n+\imath y, y>0\}$, kuris nepriklauso nuo ξ reikšmės, bet priklauso nuo tinklo taškų skaičiaus.

4.4 lema. *Baigtinei skirtumų schemai* (26), (51)*, kai nelokalioji integralinė kraštinė sąlyga aproksimuojama pagal Simpsono formulę, srityje $\mathbb{R}_q^{h+}$ egzistuoja pirmosios eilės polius $p=2n+\imath(2n\ln(2+\sqrt{3}))/\pi$.*

Taškai $\lambda=0$, $\lambda=4/h^2$ yra funkcijos $\lambda=\lambda^h(q)$ šakojimosi taškai.

Taškas $q=0$. Charakteristinės funkcijos $\gamma(q)$ Teiloro eilutė taške $q=0$ yra

$$\gamma_{S1}(q)=\frac{2(2n)^2}{(2n)^2-(2m)^2}-\frac{1}{6}q^2+\mathcal{O}(q^4),\qquad (56_1)$$

$$\gamma_{S2}(q)=\frac{2(2n)^2}{(2m)^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2(2n)^2-(2m)^2}{(2m)^2}q^2+\mathcal{O}(q^4).\qquad (56_2)$$

Abiem atvejais taškas $q=0$ yra pirmosios eilės kritinis taškas srityje $\mathbb{C}_q^h$, bet dėl šakojimosi taško savybių kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$ taškas $q=0$ nėra kritinis.

Taškas $q=2n$. Charakteristinės funkcijos $\gamma(q)$ Teiloro eilutė taške $q=2n$ yra

$$\gamma_{S1}(q)=-\frac{24(2n)^2}{(2n)^2-4(2m)^2}+\frac{1}{2}\frac{7(2n)^2-4(2m)^2+8}{(2n)^2-4(2m)^2}(q-2n)^2+\mathcal{O}((q-2n)^4),\qquad (57_1)$$

$$\gamma_{S2}(q)=-\frac{6(2n)^2}{(2m)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2(2n)^2-(2m)^2+8}{(2m)^2}(q-2n)^2+\mathcal{O}((q-2n)^4).\qquad (57_2)$$

Taškas $q=2n$ yra pirmosios eilės kritinis taškas srityje $\mathbb{C}_q^h$, o kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}_\lambda$ taškas $q=0$ nėra kritinis (žiūrėti (57)).

Taško $q=\infty$ aplinka. Taško $w=0$, kuris atitinka $q=\infty$ arba $\lambda=\infty$, aplinkoje galioja lygybė

$$\gamma_{S1}=\frac{3}{h}\mathcal{O}(1),\qquad (58_1)$$

$$\gamma_{S2}=\frac{1}{w^{2n-2m}}\cdot\frac{3}{h}\mathcal{O}(1).\qquad (58_2)$$

Pirmuoju atveju $\lim_{w\to 0}\gamma(w) = 3/h$ taškas $w = 0$ srityje $\mathbb{C}_w^h$ (arba $q = \infty$ srityje $\mathbb{C}_q^h$) visoms ξ reikšmėms yra pašalinamasis ypatingasis taškas (žiūrėti (58_1)). Taigi ta pati realioji spektrinė kreivė įeina į tašką $w = 0$ ir išeina iš šio taško. Kitų spektrinių kreivių šio taško aplinkoje nėra. Antruoju atveju, jei $m = n$, tai $\lim_{w\to 0}\gamma(w) = 3/h$ ir turime pašalinamą ypatingąjį tašką taip pat (žiūrėti (58_2)). Antruoju atveju, jeigu $n > m$, taškas $w = 0$ yra $2(n-m)$ eilės polius ir be dviejų realiųjų spektrinių kreivių egzistuoja $2(n-m-1)$ grynai kompleksinės spektrinės kreivės taško $q = \infty$ aplinkoje.

Diskrečiajam uždaviniui (26), (51_1) kompleksinių tikrinių reikšmių nėra. Egzistuoja realiosios charakteristinės funkcijos horizontali asimptotė $\gamma = 3/h$. Baigtinių skirtumų schemai (26), (51) bet kokioms parametro ξ reikšmėms tinklo taškas $2n$ nėra polius.

6 Darbo mokslinis naujumas ir aktualumas

Dauguma disertacijoje pristatytų rezultatų yra originalūs ir nebuvo minimi ankstesnėse mokslinėse publikacijose, išskyrus mokslines publikacijas iš skyriaus „Pagrindinės publikacijos“ ir „Literatūra“. Tyrimo sritis gana plati ir sudėtinga ir leidžia geriau suvokti Šturmo ir Liuvilio uždavinio su nelokaliąja integraline kraštine sąlyga spektro struktūrą ir priklausomybę nuo kraštinių sąlygų parametrų. Disertacijoje naudoti tyrimo metodai gali būti taikomi ir tiriant uždavinius su kitokio tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse konferencijose ir seminaruose srities specialistams (žr. skyrių „Rezultatų sklaida“).

7 Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, literatūros apžvalga, 4 moksliniams rezultatams skirti skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Bendra darbo apimtis – 116 puslapių.

8 Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami 6 moksliniuose straipsniuose:

1. A. Skučaitė, A. Štikonas. Spectrum Curves for Sturm–Liouville Problem with Integral Boundary Condition, *Math. Model. Anal.*, **20**(6):802–818, 2015.

2. A. Skučaitė, K. Skučaitė-Bingelė, S. Pečiulytė, A. Štikonas. Investigation of the Spectrum for the Sturm–Liouville Problem with One Integral Boundary Condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **15**(4):501–512, 2010.
3. A. Skučaitė, A. Štikonas. Zeroes and Poles of a Characteristic Function for Sturm–Liouville Problem with Nonlocal Integral Condition. *Liet. matem. rink.* Proc. LMS, Ser. A, **56**:95–100, 2015.
4. A. Skučaitė, A. Štikonas. Investigation of the Spectrum of the Sturm–Liouville Problem with a Nonlocal Integral Condition. *Liet. matem. rink.* Proc. LMS, Ser. A, **54**:67-72, 2013.
5. A. Skučaitė, A. Štikonas. Investigation of the Sturm–Liouville Problems with Integral Boundary Condition. *Liet. matem. rink.* Proc. LMS, Ser. A, **52**:297-302, 2011.
6. A. Skučaitė, S. Pečiulytė, A. Štikonas. Investigation of Complex Eigenvalues for Sturm–Liuville Problem with Nonlocal Integral Boundary Condition. *Mathematics and Mathematical modelling*, 5:24-32, 2009.

9 Rezultatų sklaida

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse mokslinėse konferencijose:

1. *MMA2016*, Tartu, Estija, 2016 m. birželio 1–4 d;
2. *ENUMATH2015*, Ankara, Turkija, 2015 m. rugsėjo 14–18 d;
3. *MMA2015*, Sigulda, Latvija, 2015 m. gegužės 26–29 d.
4. *MMA2014*, Druskininkai, Lietuva, 2014 m. gegužės 26–29 d;
5. *MMA2013*, Tartu, Estija, 2013 m. gegužės 27–30 d;
6. *MMA2012*, Talinas, Estija, 2012 m. birželio 6–9 d;
7. *MMA2011*, Sigulda, Latvija, 2011 m. gegužės 25–28 d;
8. *MMA2010*, Druskininkai, Lietuva, 2010 m. gegužės 24–27 d;

ir kitose konferencijose:

1. *LMD*, Kaunas, Lietuva, 2015 m. birželio 16–17 d;
2. *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 26–27 d;
3. *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2013 m. birželio 19–20 d;
4. *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2011 m. birželio 16–17 d;
5. *LMD*, Šiauliai, Lietuva, 2010 m. birželio 17–18 d;
6. *MMM2010*, Kaunas, Lietuva, 2010 m. balandžio 8–9 d;
7. *LMD*, Vilnius, Lietuva, 2009 m. birželio 18–19 d;
8. *MMM2009*, Kaunas, Lietuva, 2009 m. balandžio 2–3 d.

Stažuotės: Doktorantūros studijose buvo plečiamos matematinės žinios mokslinių vizitų metu:

- Trento, Italija, „Trento Winter School on Numerical Methods 2015“, vasario 2–13 d., 2015.
- Barcelona, Ispanija, „JISD2014“, Universitat Politècnica de Catalunya, birželio 16–20 d., 2014.

10 Rezultatai

Pagrindiniai disertacijoje gauti rezultatai:

- Pirmajame skyriuje rastos Šturmo ir Liuvilio uždavinio, kai nelokalioji integralinė sąlyga priklauso nuo trijų parametrų (γ, ξ_1 ir ξ_2), charakteristinės funkcijos polių, nulių, pastoviųjų tikrinių reikšmių ir kritinių taškų egzistavimo sąlygos ir šių taškų reikšmės. Kokybiškai ištirtos spektrinės kreivės ir kritinių taškų trajektorijos parametrų ξ_1 ir ξ_2 fazinėje erdvėje $S_{\boldsymbol{\xi}}$.
- Antrajame skyriuje ištirti Šturmo ir Liuvilio uždavinio, kai nelokalioji integralinė sąlyga priklauso nuo dviejų parametrų (γ ir ξ). Buvo rasti dviejų tipų bifurkacijų (ξ atžvilgiu) taškai: dvi spektrinės kreivės susikerta grynai kompleksiniame kritiniame taške; $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$ charakteristinės funkcijos nulio ir poliaus susikeitimas pastoviosios tikrinės reikšmės taške.
- Trečiajame skyriuje ištirtas diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys, atitinkantis pirmajame disertacijos skyriuje nagrinėtą diferencialinį uždavinį. Nelokalioji integralinė kraštinė sąlyga aproksimuojama trapecijų formule. Nustatyta priklausomybė tarp spektrinių kreivių skaičiaus begalybės aplinkoje ir tinklo taškų skaičiaus, ir nelokaliosios integralinės kraštinės sąlygos parametro $(n-m_2)$, čia $\xi_2 = m_2/n$. Ištirta spektrinių kreivių savybės funkcijos $\lambda = \lambda(q)$ šakojimosi taškuose $\lambda = 0$ ir $\lambda = 4/h^2$. Taškas $q = n$ yra trečiosios eilės kritinis taškas tada ir tik tada, kai m_1, m_2 ir n tenkina sąlygą $m_1^2 + m_2^2 = (1 + 2n^2)/3$.
- Ketvirtajame skyriuje ištirtas diskretusis Šturmo ir Liuvilio uždavinys, atitinkantis antrajame skyriuje aprašytus diferencialinius uždavinius. Nelokaliosios integralinės sąlygos buvo aproksimuotos pagal trapecijų arba Simpsono formulę. Ištirta spektro struktūros priklausomybė nuo nelokaliosios integralinės sąlygos aproksimavimo tipo.

Aproksimuojant nelokaliąją integralinę kraštinę sąlygą pagal trapecijų formulę, kai kurioms parametro ξ reikšmėms taškas $q = n$ yra polius. Kai nelokalioji integralinė kraštinė sąlyga aproksimuojama pagal Simpsono formulę taškas $q = 2n$ niekada nėra polius. Visoms parametro ξ reikšmėms egzistuoja pirmosios eilės polius $p = 2n + \imath(2n\ln(2+\sqrt{3}))/\pi$.

11 Summary

In the thesis the spectrum of Sturm–Liouville problem with one classical condition on the left side of the interval and different type integral nonlocal boundary conditions (NBCs) on the right side of the interval is investigated.

In Chapter 1 we investigate the spectrum of Sturm–Liouville problem with one integral NBC depending on three parameters γ, ξ_1 and ξ_2. We explore the dependence of poles, zeroes, Constant Eigenvalue points and critical points on parameters in the integral NBC. The dependence on parameter γ is described by Spectrum Curves. The properties of Spectrum Curves were defined. Critical points and their trajectories in Phase Space $S_{\boldsymbol{\xi}}$ are investigated.

In Chapter 2, the complex spectrum of the special cases of Sturm–Liouville problem with integral NBC depending on two parameters γ and ξ is investigated. We find a few types of bifurcation points.

In Chapter 3 discrete Sturm–Liouville problem with one integral NBC depending on three parameters is investigated. The integral condition is approximated by trapezoidal rule. Some properties of Spectrum Curves, critical points, poles and Constant Eigenvalues are found.

In Chapter 4 we present results for special cases of discrete Sturm–Liouville problem with one integral NBC depending on parameters γ and ξ. The integral condition is approximated by trapezoidal and Simpson's rule.

The thesis also contains an introduction, literature review, conclusions and bibliography.

12 Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1986 m. balandžio 19 d., Prienai.

Išsilavimas:

2005 Šeštokų vidurinė mokykla,
2009 Vytauto Didžiojo universiteto taikomosios matematikos bakalaurė,
2011 Vytauto Didžiojo universiteto taikomosios matematikos magistrė.

Mokslinio darbo patirtis:

2014–2015 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto jaunesnioji mokslo darbuotoja.

Pedagoginio darbo patirtis:

2012–2016 Vilniaus universiteto Medicinos fakulteto asistentė,
2016 Vilniaus universiteto Medicinos fakulteto lektorė.

Kita darbo patirtis:

2013 UAB Vtex elektroninių duomenų redaktorė,
2010–2013 Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus reikalų tvarkytoja.

Literatūra

[1] S. Mikalauskaitė. Investigation of the spectrum of the Sturm–Liuoville problem with nonlocal condition depending on three parameters. Master's thesis, Vytautas Magnus University, 2011. Available from Internet: http://vddb.library.lt/fedora/get/LT-eLABa-0001:E.02~2011~D_20110615_111638-75327/DS.005.0.02.ETD.

[2] S. Pečiulytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **10**(4):377–392, 2005. http://dx.doi.org/10.1080/13926292.2005.9637295.

[3] S. Pečiulytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Investigation of negative critical point of the characteristic function for problems with nonlocal boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **13**(4):467–490, 2008. Available from Internet: http://www.mii.lt/na/issues/NA_1304/NA13405.pdf.

[4] A. Štikonas and O. Štikonienė. Characteristic functions for Sturm–Liouville problems with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **14**(2):229–246, 2009. http://dx.doi.org/10.3846/1392-6292.2009.14.229-246.